А.А. Ильюшин

Механика сплошной среды



Издание второе,
переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов университетов, обучающихся по специальности «Механика»



Издательство Московского университета
1978

УДК 531.01

Рецензент:

Горьковский государственный университет

Ильюшин А. А.

Механика сплошной среды. Учебник. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.
287 с. 12 ил.

Библиогр. 52 назв.

В учебнике изложены основы механики сплошной среды (МСС): физическая трактовка основных понятий и статистическое обоснование понятий и аксиоматики МСС; кинематика, теория процессов деформации и внутренних напряжений в средах; физические законы сохранения, основной постулат МСС; представление уравнений состояния и термодинамических функций функционалами процесса; методы получения замкнутых систем уравнений МСС; основные типы граничных условий и постановки краевых задач. Даны замкнутые системы уравнений для классических сред (газов, жидкостей, упругих тел), для сред со сложными свойствами (вязкоупругих, нелинейно вязких, упруго- и вязкопластических и др.) и при действии электромагнитного поля; теория размерностей и подобия с ревизионным анализом уравнений МСС, критериями подобия и моделирования, с примерами автомодельных решений.

И $\frac{20305-118}{077(02)-78}$ 71—78

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию

Механика сплошной среды (МСС) — раздел теоретической физики, в котором изучаются макроскопические движения твердых, жидких и газообразных сред. В ней вводится фундаментальное понятие материального континуума и полевые характеристические функции, определяющие внутреннее состояние, движение и взаимодействие «частиц» среды, взаимодействия между различными контактирующими средами. Для этих функций устанавливаются конечные, дифференциальные и другие функциональные уравнения, представляющие физические свойства среды и законы сохранения массы, импульса и энергии; определяются начальные и граничные условия, при которых все характеристические функции могут быть найдены чисто математическими методами.

Исторически МСС развивалась параллельно с аналитической механикой системы материальных точек и абсолютно твердого тела. Но ее основные понятия полей: плотности массы, векторов перемещения и скорости среды, тензоров внутренних напряжений, деформаций и скоростей деформаций, плотности кинетической и внутренней энергии и энтропии, а также законы сохранения не могут быть получены как следствия из аналитической механики и термодинамики.

МСС имеет свою независимую аксиоматику, свои специфические экспериментальные методы изучения свойств среды и развитые математические методы; она позволяет с удивительной точностью предсказывать макроскопические явления в природе, анализировать и выбирать параметры различных проектируемых аппаратов, сооружений, конструкций и процессов. МСС — обширная и очень разветвленная наука, включающая теорию упругости, вязкоупругости, пластичности и ползучести, гидродинамику, аэродинамику и газовую динамику с теорией плазмы, динамику сред с неравновесными процессами изменения структуры и фазовыми переходами. Естественно, что литература по всем этим разделам МСС, ее приложениям в машиностроении, строительстве, металлургии, горном деле, исследованиях строения Земли и Космоса,

прогнозированию землетрясений, погоды, приливов и многим другим приложениям очень обширна.

Этот учебник МСС, рассчитанный на годовой курс в университетах, составлен на основе лекций автора по МСС на механико-математическом факультете МГУ, читавшихся и изданных МГУ (на ротапринте) в 1965—1966 гг. Его содержание составляет базис МСС: изучающий узнает полные замкнутые системы уравнений, типичные граничные условия, простые методы их анализа на основе теории размерностей и подобия и получит доступ к свободной проработке и активному использованию любого из перечисленных выше разделов МСС; но что, пожалуй, более важно — изучающий познакомится с методом построения полных систем уравнений МСС, особенно уравнений состояния среды, т. е. в определенной мере научится переводить на язык математики интересующие практику новые явления в новых материалах и средах с заранее неизвестными свойствами. Поэтому автор придает значение главам I, III, в которых разъясняется физическое содержание вводимых в курсе основных понятий и законов.

Подробное изложение аэрогидродинамики, теории упругости, пластичности и других разделов МСС должно в различных вариантах читаться в специальных курсах лекций в зависимости от специализации.

Метод инвариантных решений (§ 25) обычно не включается в основной курс лекций. Однако вся глава VI существенна для получения фундаментальных решений уравнений механики сплошной среды.

Автор благодарен сотрудникам кафедры теории упругости МГУ за помощь в подготовке рукописи.

Предисловие ко второму изданию

Существенные дополнения в содержании книги сводятся к следующим. Более полно даны статистические основы МСС, отражающие не только методы вывода основных законов сохранения (массы, импульса, энергии), но и причины возникновения и идеи введения новых макроскопических характеристик среды при необходимости отражения более тонких статистических свойств (гл. I).

Последовательно дана теория процессов деформации и нагружения — рабочий аппарат при построении уравнений состояния и термодинамики сплошной среды на базе постулата макроскопической определимости, который применительно к начально квазиизотропным средам называется постулатом изотропии (гл. II, III).

Физическая трактовка этого основного постулата и вытекающее из него функциональное представление уравнений состояния положены в основу теории сред с простыми и сложными свойствами и теории экспериментов по определению функционалов состояния. Этот фундаментальный принцип применяется также к конечной области движения среды и указывает допустимые граничные условия, при которых решения краевых задач МСС «существуют в силу постулата». Следовательно, усиливается значение формального доказательства теоремы существования в случае среды со сложными свойствами, для которой функционалы состояния в опытах не определены вполне точно, так как доказательство приведет к некоторым условиям, которым должны удовлетворять физические функционалы; такие условия могут облегчить опыты по их определению (гл. III, V).

Более полно представлена теория взаимодействия движущейся деформирующейся среды с электромагнитным полем: акцентированы условности теории при изучении движения в пространстве наблюдателя и в сопровождающей физическую окрестность точки системе координат; рассмотрены простейшие термодинамические аспекты; добавлены основы теории пьезоэлектрических эффектов (гл. V).

Наконец, в § 25 (гл. VI) даны общие преобразования квазилинейных уравнений МСС к новым искомым функциям и переменным; отмечены различные возможности существенного упрощения уравнений, если только исходная система их допускает; без подробного обоснования даны простые процедуры, связанные с построением интегрально-инвариантных решений.

Ранее было издано учебное пособие [12] (в Издательстве Московского университета готовится второе издание, построенное в соответствии с первым изданием данной книги). В качестве учебника по МСС настоящее издание вместе с пособием [12] по-прежнему представляет полный курс, читаемый в Московском государственном университете по специальности «механика».

Автор благодарен сотрудникам кафедры теории упругости за помощь в подготовке второго издания книги.

Глава I
СИСТЕМА ЧАСТИЦ И КОНТИНУУМ

Физическое тело в классической статистической механике обычно представляют в виде системы большого числа частиц, взаимодействующих между собой и с пограничными телами и находящихся в поле внешних сил. Для такого тела предполагаются справедливыми классические законы механики системы материальных точек (или законы квантовой механики). Предполагается, что любая частица системы взаимодействует с границей лишь в непосредственной близости к ней. Взаимодействие между любыми двумя частицами системы не допускает их соударения, но позволяет им как угодно удаляться. Например, центральную силу и потенциал взаимодействия двух электрически нейтральных атомов часто представляют в виде «6—12» Леннарда — Джонса:

$$F = \frac{12k\Theta_1}{a}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^7 - \left(\frac{a}{r}\right)^{13}\right],$$
$$U = 2k\Theta_1\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^6 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^{12}\right] + U_{00}, \qquad (0.1)$$

где Θ_I — характеристическая, выраженная в кельвинах (K) температура взаимодействия атомов, $k=1{,}38\cdot 10^{-16}$ эрг$\cdot$K^{-1} — постоянная Больцмана, r — расстояние между атомами, a — равновесное расстояние ($F=0$). При $r<a$ сила F отталкивающая ($F\to-\infty$ при $r\to 0$); при $r>a$ — притягивающая; при $1{,}11\ a>r>a$ сила притяжения F возрастает, а затем ($r>1{,}11\,a$) убывает по мере удаления частиц, составляя менее 1% от максимальной уже при $r=2a$. Силы притяжения существенны для объяснения агрегатных состояний. Сила взаимодействия частиц F, следовательно, возникает при сближении и исчезает при удалении на расстояния порядка a (рис. 1.1). Величину d порядка a называют диаметром атома, хотя масса его сосредоточена в ядре значительно меньшего диаметра. Модель атома представляет собой точечную массу, заключенную в упругую, почти безынерционную шаровую область диаметра d, которая имитирует электронное облако. В квантовой

механике свойства модели уточняются введением заряда, механического и магнитного моментов и т. д.

Движение системы большого числа взаимодействующих частиц во внешнем силовом поле может представлять движение и свойства тела в различных агрегатных состояниях. Моделью твердого тела при сравнительно низких и нормальных температурах и давлениях является система почти плотно упакованных частиц, совершающих небольшие тепловые колебания около состояния равновесия; моделью газа — система удаленных (на расстояния $r \gg d$) частиц, взаимодействующих только при «соударениях», т. е. сближениях на расстояния порядка диаметра частиц d и, следовательно, совершающих хаотическое движение. Охлаждать систему — значит уменьшать кинетическую энергию хаотического движения, нагревать— увеличивать. Охлаждение и нагревание возможно за счет внешнего силового поля. При охлаждении системы — газа — в результате соударения двух частиц с некоторой малой энергией происходят «захваты», система становится жидкостью, а при дальнейшем охлаждении переходит в твердое тело с колебаниями частиц около положения устойчивого равновесия.

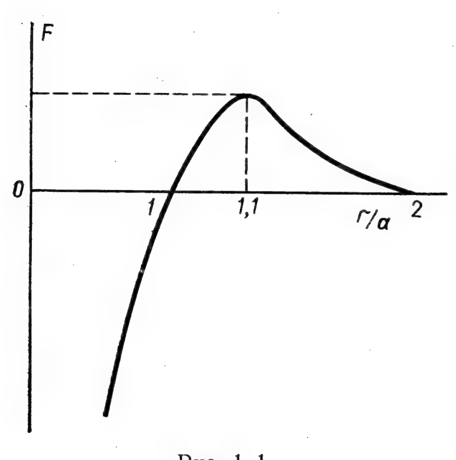


Рис. 1. 1

Приведенное качественное описание системы, моделирующей тело, не может быть дополнено количественными методами аналитической механики системы материальных точек не только потому, что очень велико число материальных точек (скажем, порядка 10^{20} в 1 см^3), но и потому, что сама информация об их индивидуальных движениях практически ничего не говорит о макроскопических свойствах движения системы. Специальный подход к этой проблеме дают методы статистической механики, позволяющие ввести необходимые в МСС основные понятия — плотности, скорости, внутренних напряжений, энергии, температуры, энтропии и количества тепла.

В механике сплошной среды тело представляют в виде некоторой субстанции, называемой материальным континуумом, непрерывно заполняющей объем геометрического пространства. Бесконечно малый объем тела также называется частицей. Феноменологически вводятся понятия плотности, перемещения и скорости,

внутренней энергии, температуры, энтропии и потока тепла как непрерывно дифференцируемых функций координат и времени. Вводятся фундаментальные понятия внутренних напряжений и деформаций и постулируется существование связи между ними и температурой, отражающей в конечном счете статистику движения и взаимодействия атомов. В МСС используются основные уравнения динамики системы и статистической механики, в первую очередь — законы сохранения массы, импульса, энергии и баланса энтропии. Обоснование этого и установление взаимосвязи вводимых феноменологических и статистических одинаковых понятий и величин целесообразно для более полного понимания и возможно на основе статистической механики. Некоторым вопросам взаимосвязи аналитической механики, статистической механики и МСС посвящена эта глава.

§ 1. Основы аналитической механики

Рассмотрим свободную от связей систему $N=n/3$ материальных точек, обладающую, следовательно, $n=3N$ степенями свободы. Прямоугольные декартовы координаты любой k-й точки обозначим

$$r_k=(x_{3k-2},\ x_{3k-1},\ x_{3k});\quad m_{(k)}=m_{3k-2}=m_{3k-1}=m_{3k} \text{ — ее масса.}$$

Движение системы определяется законом Ньютона:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\mathcal{F}_i\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1.1}$$

Пусть сила $\mathcal{F}_i=\mathcal{F}_i'+\mathcal{F}_i^e$, состоящая из сил взаимодействия с другими точками системы $\mathcal{F}_i'$ и с внешним полем — $\mathcal{F}_i^e$, складывается из потенциальной

$$\mathcal{F}_{iU}=-\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad U=U(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\equiv U(x,\ t), \tag{1.2}$$

и непотенциальной F_i.

Функцией Лагранжа системы называется

$$L(x,\ \dot{x},\ t)=K(\dot{x})-U(x,\ t),$$

$$K=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2, \tag{1.3}$$

где K — *кинетическая энергия* системы.

Уравнения (1.1) можно переписать в виде *уравнений Лагранжа 2-го рода*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=F_i\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1.4}$$

Внутренние силы (взаимодействия частиц) $\mathcal{F}_i'$ предполагаем центральными и имеющими потенциал $U'(x, t)$, внешние — частично потенциальными:

$$\mathcal{F}_i^e = -\frac{\partial U^e}{\partial x_i} + F_i.$$

Переписывая (1.1) в векторной форме

$$m_{(k)} \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathcal{F}_{(k)}' + \mathcal{F}_{(k)}^e = \mathcal{F}_{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.5}$$

и суммируя (1.5) по всем k, получим теорему о движении *центра масс системы*

$$\dot{\mathbf{Q}} \equiv M\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathcal{F}^e, \tag{1.6}$$

где $M = \Sigma m_{(k)}$ — масса системы, $\mathcal{F}^e$ — главный вектор всех внешних сил, $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор k-й точки, $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\Sigma m_{(k)} \mathbf{r}_k}{M}. \tag{1.7}$$

Внутренние силы в (1.6) сократились вследствие равенства действия и противодействия каждой пары частиц.

Умножим каждое уравнение (1.5) векторно на соответствующий $\mathbf{r}_k$. Замечая, что

$$\mathbf{r}_k \times \frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_k \times \frac{d\mathbf{r}_k}{dt}\right),$$

и учитывая свойство внутренних сил, после сложения всех полученных уравнений найдем

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{L}^e, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{G}$ — *кинетический момент системы*, $\mathbf{L}^e$ — главный момент всех внешних сил:

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times m_{(k)} \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k = \dot{\mathbf{r}}_k,$$

$$\mathbf{L}^e = \Sigma \mathbf{r}_k \times \mathcal{F}_{(k)}^e. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.8) представляет теорему о кинетическом моменте, или *о моменте количества движения.*

Допустим, что на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \tau$ при $\tau \to \infty$ существуют средние значения

$$\tilde{K} = \left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau K dt\right)_{\tau\to\infty},$$

$$\tilde{B} = -\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{1}{2}\mathcal{F}_i x_i dt\right)_{\tau\to\infty}, \qquad (1.10)$$

называемые: $\tilde{K}$ — средней кинетической энергией системы, $\tilde{B}$ — вириалом (в некотором смысле — средней работой системы). Допустим еще, что для любого i

$$\left(\frac{1}{\tau}\left[(x_i\dot{x}_i)_{t=\tau} - (x_i\dot{x}_i)_{t=0}\right]\right)_{\tau\to\infty} \to 0, \qquad (1.10')$$

т. е., например, x_i, $\dot{x}_i$ ограничены по модулю. Тогда, умножая (1.1) на $x_i/2dt$, интегрируя по t от 0 до τ и суммируя по всем i, получим теорему вириала:

$$\tilde{K} = \tilde{B}. \qquad (1.11)$$

Это следует из преобразования

$$x_i\ddot{x}_i = \frac{d}{dt}(x_i\dot{x}_i) - \dot{x}_i^2$$

и использования условия (1.10′). Если силы $\mathcal{F}_i$ имеют потенциал, т. е. в (1.4) $F_i=0$, причем потенциальная энергия $U(x)$ является однородной формой от x_i степени s, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = sU,$$

то теорема вириала дает

$$\tilde{K} = \frac{s}{2}\tilde{U},$$

и, в частности, для квадратичной формы $U(s=2)$

$$\tilde{K} = \tilde{U},$$

т. е. средние кинетическая и потенциальная энергии одинаковы.

Функция Лагранжа полностью характеризует рассматриваемую систему в отношении сил взаимодействия между частицами и потенциальных сил, действующих на них со стороны внешнего поля. Поэтому составление выражения функции Лагранжа представляет основную задачу механики системы. Все необходимые дифференциальные уравнения движения находятся формально из уравнений Лагранжа (1.4).

Введем новые переменные — импульсы и координаты:

$$p_i = m_i \dot{x}_i, \quad q_i = x_i;$$

тогда

$$L = L(\dot{q}, q, t) = K(\dot{q}) - U(q, t),$$

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m_i}, \quad \mathcal{F}_{iU} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Легко видеть, что

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Функцией Гамильтона, зависящей от координат q_i и импульсов p_i, называется

$$H \equiv \Sigma p_i \dot{q}_i - L. \tag{1.12}$$

При этом предполагается, что система n уравнений (1.11) разрешена относительно $\dot{q}_i$, и эти выражения подставлены в функцию Лагранжа и первую сумму формулы (1.12). В случае декартовых координат построение функции Гамильтона системы является элементарным. Криволинейные координаты часто более удобны для анализа динамики систем.

Пусть $n=3N$ независимых криволинейных координат (называемых также лагранжевыми координатами) определяют все декартовы x_i, число которых также $n=3N$. Пусть дано преобразование

$$x_j = x_j(q_1, \ldots, q_n), \quad \dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Тогда

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} k_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \frac{\partial x_l}{\partial q_j}. \tag{1.14}$$

Следовательно, кинетическая энергия остается квадратичной однородной функцией скоростей $\dot{q}_i$, но коэффициенты k_{ij} зависят от координат q_i.

Обобщенные непотенциальные силы Q_i, соответствующие координатам q_i, находятся из тождественности выражения виртуальной работы в декартовой и криволинейной системе координат:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \delta x_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i, \quad \delta x_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i,$$

откуда находим

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i}. \tag{1.15}$$

Можно доказать, что уравнения Лагранжа (1.4) при замене координат сохраняют прежний вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i; \quad L = L(\dot{q}_i, q_i, t) = K - U. \tag{1.16}$$

Построение функции Гамильтона. Функция Лагранжа $L = L(\dot{q}, q, t)$ уже выражена через координаты q_i и скорости $\dot{q}_i$. Назовем обобщенным импульсом, соответствующим координате q_i, величину

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.17}$$

При построении функции Гамильтона H переменные q_i, p_i принимаются за новые независимые между собой искомые функции времени ($2n$ функций от t). По определению $H(p, q, t)$ и свойству однородных квадратичных форм* с учетом (1.16) получим функцию Гамильтона системы, выраженную через обобщенные координаты, импульсы и время:

$$H = H(p, q, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L = K + U(q, t), \tag{1.18}$$

где K выражается явно с помощью матрицы $\overline{k}_{ij}$, обратной k_{ij}:

---

* $\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2K.$

$$\sum_{m=1}^{n} \bar{k}_{im} k_{jm} = \delta_{ij} \equiv \begin{vmatrix} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j \end{vmatrix} \quad 2K = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{k}_{ij} p_i p_j \tag{1.19}$$

(δ_{ij} называется символом Кронекера).

Теперь n уравнений Лагранжа (1.16), которые определяют координаты и каждое из которых — дифференциальное уравнение второго порядка по времени, можно привести к системе $2n$ уравнений первого порядка для q_i и p_i (при $Q_i=0$):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.20}$$

Эта система $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по t, разрешенная относительно первых производных от координат и импульсов, называется *уравнениями Гамильтона.*

Найдем полную производную по времени от функции Гамильтона

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt.$$

На основании (1.20)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1.21}$$

Рассматриваемая нами система называется *консервативной*, если силы взаимодействия между частицами и силы внешнего поля имеют потенциал, не зависящий явно от времени: $U=U(q)$. В этом случае U представляет потенциальную энергию системы и согласно (1.18) $H(p, q)$ — полную энергию, причем $\partial H/\partial t=0$. На основании (1.21) получаем *закон сохранения энергии*:

$$H = K + U = E = \text{const}. \tag{1.22}$$

В декартовых ортогональных координатах для консервативных систем этот закон имеет выражение

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} p_i^2 + U(q) = E = \text{const}. \tag{1.23}$$

Если главный вектор $\mathcal{F}^e$ и главный момент $\mathbf{L}^e$ всех внешних сил, действующих на систему, равны нулю, то из (1.6), (1.8) получаем интегралы количества движения и момента количества движения системы (два векторных интеграла):

$$\mathbf{Q} = \text{const}, \quad \mathbf{G} = \text{const}. \tag{1.24}$$

Вместе с интегралом энергии (1.22) для консервативных систем при этом имеем семь скалярных интегралов движения.

В общем случае система $2n$ дифференциальных уравнений (1.20) имеет $2n$ независимых интегралов, которые можно записать в виде

$$\mathcal{J}_m(p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n; t) = C_m \quad (m = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{1.25}$$

Определение их представляет сложную проблему, например, уже при $n=9$ — известную задачу трех тел. Постоянные интегрирования C_m в классической механике находятся по заданным начальным условиям

$$t = t_0 : p = p_0, \ (p_i = p_{i0}); \ q = q_0, \ (q_i = q_{i0}) : C_m = \mathcal{J}_m(p_0; q_0; t_0). \tag{1.26}$$

В статистической механике вместо задачи определения всех истинных импульсов p_i и координат q_i частиц системы в момент t ставится совсем другой вопрос — о статистических свойствах движения нашей системы, определяемого уравнениями Гамильтона при вполне заданной $H(p, q, t)$, если начальные условия (1.26) статистические. Рассматривается непрерывное множество начальных условий (1.26) с заданным интервалом их изменения и вводится функция $f_C(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})$ плотности их распределения, которая согласно (1.25) является функцией всех p_i, q_i и t:

$$f_C(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_{2n}) = f(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n; t). \tag{1.27}$$

По построению она постоянна для истинного движения системы при любых начальных условиях, т. е.

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = 0.$$

На основании уравнений движения (1.20) получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных для функции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = 0, \tag{1.28}$$

называемое уравнением Лиувилля. Это — основное уравнение статистической механики. В § 2.1 физическая трактовка $f(p, q, t)$ рассмотрена более подробно, и многие выводы получены непосредственно из уравнения (1.28).

В МСС наряду с уравнениями движения системы материальных точек используются эквивалентные им общие принципы механики.

Принцип Гамильтона. Пусть движение системы, имеющей некоторое число степеней свободы и такое же число лагранжевых координат q_i, определяется функцией Лагранжа $K-U=L(\dot{q}, q, t)$ и системой соответствующих сил Q_i. В фиксированный момент t' состояние I системы определено координатами и скоростями q_i', $\dot{q}_i'$; в силу законов движения в фиксированный момент $t''>t'$ система приходит в состояние II (q_i'', $\dot{q}_i''$). В каждый момент t ($t'\leqslant t\leqslant t''$) функция Лагранжа L имеет определенное значение, и потому функционал

$$\Gamma=\int_{t'}^{t''} L(\dot{q}, q, t)\,dt, \tag{1.29}$$

называемый *гамильтоновым действием*, является фиксированным числом. Наряду с действительными значениями $q(t)$ рассмотрим какие-нибудь в каждый момент t бесконечно мало отличающиеся от них значения $q'(t)=q(t)+\varphi(t)$, где $\varphi(t)$, обозначаемые $\delta q(t)$, непрерывно дифференцируемы по времени, причем $\varphi(t')=\varphi(t'')$. Вычисляя разность

$$\delta\Gamma\equiv\Gamma'-\Gamma=\int_{t'}^{t''}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\varphi}_i+\frac{\partial L}{\partial q_i}\varphi_i\right)dt=$$

$$=\int_{t'}^{t''}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\varphi_i dt$$

и учитывая, что входящие в скобки выражения определяются для истинного движения (при $\varphi_i=0$) и на основании (1.16) равны Q_i, получим

$$\delta\Gamma+\int_{t'}^{t''}\Sigma Q_i\delta q_i dt=0. \tag{1.30}$$

Отсюда при $Q_i=0$ для голономных систем с потенциалом сил $U(q, t)$ получаем принцип Гамильтона: гамильтоново действие в истинном движении имеет стационарное значение ($\delta\Gamma=0$).

§ 2.1. О статистическом описании состояния системы

В этом параграфе ставится задача: пояснить некоторые основные *идеи метода статистической механики* при постановке и реше-

нии задач динамики сложных систем, подчиняющихся законам классической механики, и вывести некоторые законы, принимаемые в МСС аксиоматически. Рассматривается свободная замкнутая механическая система S_N, состоящая из N частиц, взаимодействующих между собой и с внешними телами, имеющая $n \geqslant 3N$ степеней свободы. Предполагается, что число N и структура каждой частицы не изменяются с течением времени, т. е. число и геометрический смысл лагранжевых координат q_i $(i=1, 2, ..., n)$ сохраняются. Взаимодействия частиц между собой и с внешними телами предполагаются потенциальными. Короче, рассматривается свободная механическая система тел (частиц) S_N с $n \geqslant 3N$ степенями свободы, для которой известна функция Гамильтона (1.18)

$$H_N(p, q, \mu) = K(p, q) + U(q, \mu), \tag{2.1}$$

где $q=(q_1, q_2, ..., q_i, ..., q_n)$ — набор координат, $p=(p_1, p_2, ..., p_i, ...$ $..., p_n)$ — набор импульсов (1.17), $\mu=(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ — набор внешних параметров (координат), определяющих положение взаимодействующих с S_N внешних тел. Параметры μ могут зависеть от t. Координаты и импульсы системы, т. е. $2n$ функций времени $q_i(t)$, $p_i(t)$, удовлетворяют $2n$ обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка (1.20).

Вопрос о соответствии рассматриваемой системы S_N конкретным физическим средам в общем виде является сложным и не будет рассматриваться. Достаточно отметить, что во многих случаях такое соответствие существует. Продолжаются многочисленные исследования по развитию теории сплошной среды на основе классической и квантовой статистической механики, и идеи статистического метода являются общими.

В МСС (как и ряде других разделов теоретической физики) представляют интерес системы S_N, для которых имеют физический смысл понятия в некотором смысле средних значений величин плотности массы, скорости движения, кинетической энергии и других, а также средние отклонения от средних и т. д., т. е. системы S_N с закономерными статистическими свойствами.

Любое частное и все возможные движения системы S_N вполне определяются $2n$ интегралами движения (1.25), содержащими $2n$ произвольных постоянных C_m $(m=1, 2, ..., 2n)$. *Макроскопическими свойствами системы можно считать только средние статистические ее свойства.* Следовательно, статистическими свойствами должен обладать набор произвольных постоянных C_m, т. е. на основании (1.26) набор начальных условий системы. Этот необычный для классической механики взгляд имеет глубокий физический смысл и позднее пояснен на примере так называемого равновесного состояния системы.

Дадим сначала аксиоматическую постановку задачи о движении рассматриваемой замкнутой системы в классической статисти-

ческой механике, содержащую следующие основные определения и аксиомы системы S_N.

1. Функция Гамильтона (2.1) задана, т. е. кинетическая энергия $K(p, q)$ и потенциал всех внутренних и внешних сил $U(q, \mu)$ детерминированно заданы как функции своих аргументов p, q, μ, причем весь набор внешних параметров μ во времени t также задан, следовательно, является детерминированным.

2. Свойства функции Гамильтона $H_N(p, q, \mu)$, внешних параметров $\mu(t)$, и множества всех возможных для S_N начальных условий (1.26) (иначе — множества всех значений интегралов движения (1.25)) таковы, что существуют определенные постоянные или меняющиеся во времени область Γ_q изменения координат системы и область Γ_p изменения импульсов системы,

$$q \in \Gamma_q, \quad p \in \Gamma_p, \tag{2.2}$$

и их объединение Γ — область изменения параметров (p, q) системы

$$\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q, \quad (p, q) \in \Gamma, \tag{2.3}$$

причем параметры (p, q) внутри области Γ могут принимать все значения. Иначе говоря, существует связная область Γ $2n$-мерного пространства E_{2n} импульсов p и координат q, внутри которой заключены и могут принимать все значения импульсы и координаты (p, q) системы S_N.

3. В каждый момент времени t внутри области Γ существует некоторая однозначная непрерывно дифференцируемая по аргументам функция $f_N(p, q, t)$, определяющая плотность вероятности нахождения системы S_N внутри фазового объема $d\Gamma$, для простых S_N (при $n = 3N$) равного

$$d\Gamma \equiv dp\,dq \equiv dp_1 dp_2 \ldots dp_n dq_1 dq_2 \ldots dq_n, \tag{2.4}$$

взятого в окрестности состояния (точки) с координатами $(p, q) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, так что вероятность нахождения системы S_N в объеме $d\Gamma$ равна

$$f_N(p, q, t)\, d\Gamma = f_N(p, q, t)\, dp\,dq, \tag{2.5}$$

а вероятность нахождения системы во всем объеме Γ равна единице (при любом t):

$$\int_\Gamma f_N(p, q, t)\, d\Gamma = 1. \tag{2.6}$$

При этом предполагается, что граница области Γ, обозначаемая $(\Gamma)_{\text{гр}}$, для системы S_N недостижима, иначе — *вероятность выхода системы (хотя бы одной из координат p_i, q_j) на $(\Gamma)_{\text{гр}}$ равна нулю*:

$$f_N(p, q, t) = 0 \text{ для } (p, q) \in (\Gamma)_{\text{гр}}. \tag{2.7}$$

4. Функция $f_N(p, q, t)$ удовлетворяет внутри Г дифференциальному уравнению Лиувилля

$$\dot{f}_N \equiv \frac{\partial f_N}{\partial t} - [H_N; f_N] = 0, \quad (p, q) \in \Gamma, \tag{2.8}$$

где $[H_N; f]$ называется скобкой Пуассона:

$$[H_N; f_N] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H_N}{\partial q_i} \frac{\partial f_N}{\partial p_i} - \frac{\partial H_N}{\partial p_i} \frac{\partial f_N}{\partial q_i} \right], \tag{2.8'}$$

т. е. линейному дифференциальному уравнению первого порядка в частных производных по p, q, t с переменными коэффициентами, выраженными через функцию Гамильтона, т. е. зависящими от p, q и $\mu(t)$.

Из теории таких уравнений известно, что при весьма общих предположениях решение, т. е. функция $f_N(p, q, t)$, однозначно определяется по ее значению при каком-нибудь фиксированном $t=t_0$, т. е. начальным условием

$$t = t_0, \ f_N(p, q, t_0) = f_N^0(p, q), \tag{2.9}$$

где $f_N^0(p, q)$ задана.

Движение системы S_N в статистической механике считается известным, если для любого t известна функция $f_N(p, q, t)$. Физический смысл такого определения установлен дальнейшими определениями и гипотезами. Дадим формальное сопоставление аналитической и статистической механики в виде табл. 1 (в обоих случаях предполагается, что задана одна и та же функция Гамильтона).

Цель решения задачи аналитической механики для системы S_N состоит в том, чтобы найти одну заданную функцию импульсов и координат $\mathcal{F}(p, q)$ (или набор таких функций) в любой момент времени t, например найти радиус-вектор k-й частицы $\mathbf{r}_k(q)$, ее кинетическую энергию $K_k(p, q)$, относительное положение l-й и k-й частиц $\mathbf{r}_l(q)-\mathbf{r}_k(q)$, $1 \leqslant k$, $l \leqslant N$, и т. д. Цель достигается, если из первого столбца таблицы найденные по начальным условиям функции $p(t)$, $q(t)$ внести в выражение функции $\mathcal{F}(p, q)$:

$$\tilde{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{F}(p(t), q(t)). \tag{2.10}$$

Цель решения задачи статистической механики применительно к МСС — в определении средних статистических значений тех же или других заданных функций $\mathcal{F}(p, q)$ в различных фиксированных объемах или точках фазового пространства, например в точке x, в различные моменты времени t или интервалы времени. Эти

Таблица 1

Искомые функции; уравнения, условия	Классическая механика	Статистическая механика
Основные искомые функции	$2n$ функций времени t $p(t), q(t)$: $p_i(t),\ q_i(t),\ i=1, 2, \ldots, n$	одна функция $2n+1$ переменной $f_N(p, q, t)$: $f_N(p_1, \ldots; p_n;\ q_1, \ldots, q_n; t)$
Определяющие уравнения	$2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H_N}{\partial q},\ \frac{dq}{dt}=\frac{\partial H_N}{\partial p}$: $\dot{p}_i=-\frac{\partial H_N}{\partial q_i},\ \dot{q}_i=\frac{\partial H_N}{\partial p_i}$, $i=1, 2, \ldots, n$	одно дифференциальное уравнение в частных производных $\dot{f}_N(p, q, t)=0$: $\frac{\partial f_N}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial H_N}{\partial q_i}\frac{\partial f_N}{\partial p_i}+\frac{\partial H_N}{\partial p_i}\frac{\partial f_N}{\partial q_i}\right)=0$
Начальные условия	$2n+1$ констант $(t_0,\ q_i^0,\ p_i^0)$ $t=t_0,\ p=p^0,\ q=q^0$: $p_i=p_i^0,\ q_i=q_i^0$, $i=1, 2, \ldots, n$	одна функция $2n$ переменных f_N^0 $t=t_0$, $f_N(p, q, t_0)=f_N^0(p, q)$: $f_N(p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n;\ t_0)=f_N^0(p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n)$
Другие искомые функции (свойства)	детерминированное значение заданной функции $\mathcal{F}(p, q)$ при различных t	среднее значение заданной функции $\mathcal{F}(p, q)$ в момент t

средние на основании специальной гипотезы трактуются как макроскопические параметры, которые можно измерить в опытах.

Средним статистическим значением заданной *функции* $\mathcal{F}(p, q)$ *в момент* t *по всей области* Γ называется

$$\tilde{\mathcal{F}}_t=\langle\mathcal{F}(p, q)\rangle_\Gamma\equiv\langle\mathcal{F}(p, q)\rangle=\int_\Gamma \mathcal{F}(p, q)\, f_N(p, q, t)\, d\Gamma, \quad (2.11)$$

т. е. математическое ожидание $\mathcal{F}(p, q)$ по Γ с весовой функцией f_N. Это среднее зависит от времени (так как f_N зависят от t) и понимается как среднее $\mathcal{F}(p, q)$ во всем фазовом пространстве, занятом системой в момент t при всех возможных в момент t скоростях всех частиц системы S_N. Например, среднее значение координаты q_1 системы в момент t равно следующей функции t:

$$\tilde{q}_1(t) = \langle q_1 \rangle = \int_{\Gamma} q_1 f_N d\Gamma \equiv$$

$$\equiv \int_{\Gamma} q_1 f_N (q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n, t)\, dq_1 \ldots dq_n dp_1 \ldots dp_n.$$

Всякое другое среднее значение функции $\mathcal{F}(p, q)$ в момент t (в точке $\mathbf{r}$ пространства и т. п.) определяется как условное: в момент t из всей области Γ выделяется подобласть $\Gamma' \in \Gamma$ размерности $\leqslant 2n$ и вычисляется математическое ожидание $\mathcal{F}(p, q)$ по этой подобласти с весовой функцией f_N:

$$\langle \mathcal{F}(p, q) \rangle_{\Gamma'} = \int_{\Gamma'} \mathcal{F}(p, q) f_N (p, q, t)\, d\Gamma'. \tag{2.12}$$

Для МСС имеют особое значение условные средние значения некоторых функций $\mathcal{F}(p, q)$ в фиксированной точке $\boldsymbol{x}$ физического пространства, включающие требование, чтобы радиус-вектор центра масс фиксированной k-й частицы системы $\mathbf{r}_{ck}$ равнялся $\boldsymbol{x}$: $\mathbf{r}_{ck}(p, q) = \boldsymbol{x}$. Это условие накладывает ограничение на p, q, т. е. выделяет область Γ_k' размерности $2n$—3; фактическое вычисление $d\Gamma_k'$ и границы области Γ_k' часто связано со сложными (хотя и не принципиальными) вычислениями. Поэтому, фиксируя внимание на принципиальной стороне статистического метода, *в дальнейшем в этой главе рассматриваются только простые замкнутые системы* S_N, т. е. такие, для которых $n = 3N$ и криволинейные координаты q совпадают с декартовыми x. Обозначим

$$\boldsymbol{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{\alpha=1}^{3} x^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \tag{2.13}$$

радиус-вектор точки пространства ($\mathbf{e}_{\alpha}$ — ортогональный декартов репер),

$$\mathbf{r}_k = \sum_{\alpha=1}^{3} q_k^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

$$\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k = \sum_{\alpha=1}^{3} p_k^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad p_k^{\alpha} = m_k v_k^{\alpha}, \tag{2.14}$$

радиус-вектор, его декартовы координаты (q_k^{α}), импульс и его компоненты (p_k^{α}), массу (m_k) и скорость ($\mathbf{v}_k$) k-й частицы (материальной точки). $6N$ параметров $p\,(p_k^{\alpha})$, $q\,(q_k^{\alpha})$ $(\alpha = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, \ldots, N)$ представляют координаты $6N = 2n$-мерного *фазового пространства* E_{2n}. Кинетическая энергия k-й частицы и всей системы S_N равны

$$K_k = \frac{(\mathbf{p}_k)^2}{m_k} = \frac{m_k}{2}(\mathbf{v}_k)^2 = \frac{m_k}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}(v_k^\alpha)^2, \quad K = \sum_{k=1}^{N} K_k. \tag{2.15}$$

Элементы объемов физического пространства dV в точке x (обозначаемый иногда dx) и фазового пространства E_{2n} имеют выражения

$$dV \equiv dx = dx^1 dx^2 dx^3, \quad d\Gamma \equiv dp dq =$$
$$= dp_1^1 dp_1^2 dp_1^3 \dots dp_N^1 dp_N^2 dp_N^3 dq_1^1 dq_1^2 dq_1^3 \dots dq_N^1 dq_N^2 dq_N^3. \tag{2.16'}$$

На том основании, что функция $f_N^0(p, q) = f_N(p, q, t_0)$ определена при $t = t_0$ в некоторой конечной области $\Gamma = \Gamma_0$, причем на границе Γ_0 согласно (2.7) обращается в ноль, иногда ее дополняют до бесконечной области Γ_∞, непрерывно продолжая $f_N^0(p, q)$ значением ноль в области дополнения.

Поскольку $f_N(p, q, t)$ определяется значением f_N^0 и уравнением Лиувилля (2.8), причем определяется и область Γ, в которой $f_N > 0$ и на границе которой $f_N = 0$ (2.7), то $\Gamma \in \Gamma_\infty$ может быть дополнена до Γ_∞ со значением $f_N = 0$ вне Γ. Область Γ_∞ определяется условиями

$$\text{для } (p, q) \in \Gamma_\infty: \begin{array}{c|l} -\infty < p_m^\alpha < \infty & \alpha = 1, 2, 3, \\ -\infty < q_m^\alpha < \infty & m = 1, 2, \dots, N. \end{array} \tag{2.16}$$

Средним значением данной функции $\mathcal{F}(p, q)$ при условии, что определенная точка с координатой $\mathbf{q}_k$ находится в точке $\mathbf{r}$ физического пространства, называется величина (функция $\mathbf{r}$, t), определяемая (2.12), причем объем $d\Gamma'$ получается из $d\Gamma$ (2.16'), в котором отбрасывается произведение $dr_k \equiv dq_k^1 dq_k^2 dq_k^3$, вместо q_k^α в подынтегральные функции $\mathcal{F}$, f_N внесены значения x^α и область Γ' изменения всех импульсов и всех координат, кроме q_k^α, совпадает с областью их изменения в Γ (например Γ_∞ при всех $m \neq k$).

Такое выражение средней значительно упрощается, если ввести δ-функцию Дирака. Напомним, что если на отрезке $a < \mathrm{x} < b$ задано множество непрерывных функций (с довольно слабыми ограничениями их свойств), то функцией $\delta(\mathrm{x})$ называется такая, что для любой $\varphi(\mathrm{x})$ из рассматриваемого множества

$$\int_a^b \varphi(\xi)\,\delta(\mathrm{x} - \xi)\,d\xi = \varphi(\mathrm{x}), \quad (\mathrm{x}, \xi) \in [a, b]. \tag{2.17}$$

Отсюда следуют свойства δ-функции:

$$\delta(\mathrm{x} - \xi) = \begin{vmatrix} 0, & \xi \neq \mathrm{x} \\ \infty, & \xi = \mathrm{x} \end{vmatrix}, \quad \int_a^b \delta(\mathrm{x} - \xi)\,d\xi = 1, \; \delta(\mathrm{x} - \xi) = \delta(\xi - \mathrm{x}). \tag{2.18}$$

Следовательно, интеграл функции двух переменных $\varphi(\mathrm{x}, y)$ по y при аргументах, заключенных в интервалах $a<x<b$, $a<y<b$, может быть представлен в виде двойного интеграла

$$\mathcal{J}(\mathrm{x}) \equiv \int_a^b \varphi(\mathrm{x}, y)\,dy = \int_a^b \int_a^b \varphi(\xi, y)\,\delta(\mathrm{x}-\xi)\,d\xi dy. \qquad (2.19)$$

Если обозначить произведение трех δ-функций кратко

$$\delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \equiv \delta(q_k^1 - x^1)\,\delta(q_k^2 - x^2)\,\delta(q_k^3 - x^3), \qquad (2.20)$$

то введенное выше среднее значение $\mathcal{F}(p, q)$ при условии, что $\mathbf{q}_k=\mathbf{r}$, а все другие $\mathbf{r}_m$ $(m\neq k)$ принимают все значения из области Γ, можно записать в виде интеграла по всей области Γ

$$\tilde{\mathcal{F}}_k(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathcal{F}(p, q)\rangle_{\Gamma'} = \int_\Gamma \mathcal{F}(p, q)\,f_N(p, q, t)\,\delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r})\,d\Gamma, \qquad (2.21)$$

так как δ-функция (2.20) автоматически преобразует $6N$-кратный интеграл (2.21) в $6N$—3-кратный по всем p и всем q, кроме q_k^α, которые принимают значения x^α.

Равновесный ансамбль. Прежде чем перейти к вычислению средних статистических значений некоторых существенных для МСС функций и выводу некоторых законов, необходимо пояснить возможность *физической трактовки статистического подхода.* Для этого рассмотрим частный случай. Пусть консервативная система S_N (внешние параметры μ постоянны, H представляет полную энергию системы) находится в *равновесном состоянии*, т. е. в неизменном заключающем ее неподвижном объеме V физического пространства макроскопическое состояние является «замороженным», не изменяющимся во времени; равновесное состояние в объеме V *макроскопически однородно*, т. е. одинаково в различных частях объема V. При этом обычно предполагается, что не только общее число частиц N очень велико, но и число частиц каждого сорта N_1, N_2, ..., N_γ (γ — число сортов частиц $N=N_1+N_2+\ldots+N_\gamma$) велико. В равновесное состояние при некоторых ограничениях на $U(q, \mu)$ может прийти, например, газ или смесь не реагирующих между собой газов в баллоне с абсолютно неподвижной стенкой («адиабатической оболочкой») или с макроскопически неподвижной стенкой, имеющей постоянную температуру («термостат»).

Консервативная система S_N, для которой $\mathbf{Q}=\mathbf{G}=0$ (1.6), (1.9), *находится в равновесном состоянии (равновесна)*, если в конкретном опыте на интервале времени $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau$, где t_0 — любой момент (начало отсчета t), среднее значение по времени для любой заданной функции координат $\mathbf{q}_k$ и импульсов $\mathbf{p}_k$ $(k=1, 2, \ldots, N)$

$$\mathcal{F}(p, q) \equiv \mathcal{F}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N;\ \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N),$$

т. е. величина

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \mathcal{F}(p(t),\ q(t))\, dt \tag{2.22}$$

не зависит от t_0 и τ при условии, что

$$\tau > \tau_s = \text{const}. \tag{2.23}$$

Наименьшее значение τ_s длины интервала времени, при котором $\tilde{\mathcal{F}}$ остается постоянной, называется *характеристическим временем* системы S_N. Само среднее значение $\tilde{\mathcal{F}}$ называется макроскопическим, или наблюдаемым, значением функции $\mathcal{F}$ (p, q). Если начиная с любого момента t_0 *в конкретном опыте* измерять q, p через минимальные доступные отрезки времени $\Delta\tau$, то за время τ накопится большое число измерений (q^{a1}, p^{a1}), т. е. найдется множество состояний системы $S_N^{(a1)}$ $(a1=1, 2, \ldots;\ \tau_s/\Delta\tau \gg 1)$. Так как потенциалы U', U^e от времени не зависят, то дальнейшие измерения за пределами интервала дают результаты, почти повторяющие найденные на достаточно большом отрезке времени τ_s. Например, в случае «макроскопически неподвижного» монокристалла при нормальных условиях (давлении, температуре) некоторый меченый атом колеблется около положения равновесия, проходя все возможные значения координат и скоростей за время порядка 10^{-12}—10^{-13} с, и, значит, τ_s такого же порядка или несколько большего. В случае газов (He, Ar, N_2) при нормальных температуре и давлении каждая молекула имеет около $5 \cdot 10^9$ столкновений в секунду, т. е. τ_s порядка 10^{-9} с.

Поскольку время τ_s мало по сравнению с очень малым микроскопическим временем, которое для кристаллов и газов, например, порядка $10^{-6} \sim 10^{-3}$ с, то все найденные выше в опыте состояния системы $S_N^{(a1)}$ $(a1=1, 2, \ldots;\ \tau_s/\Delta\tau \gg 1)$ можно считать допустимыми начальными условиями (1.26) для системы S_N. Получается, что как будто вместо одной системы S_N при $t=t_0$ мы имеем набор систем $S_N^{(a1)}$, отличающихся начальными условиями.

Производя множество конкретных опытов при макроскопически равноправных внешних условиях (например, с газом в термостатах, являющихся баллонами различной формы из разных материалов при одинаковых объемах и температурах с одинаковыми интервалами измерений $\Delta\tau$), получим конечное множество MS_N наборов систем

$$S_N^{(a1)}, S_N^{(a2)}, \ldots, S_N^{(ab)}, \ldots, S_N^{(aB)}\ (b = 1, 2, \ldots, B).$$

Система S_N находится в макроскопически равновесном состоянии (*макроскопически равновесна*), если в любом конкретном опыте она равновесна и имеет во всех опытах одинаковые τ_s, $\tilde{\mathcal{F}}$ с некоторой макроскопически определенной степенью точности.

Множество MS_N равновесных состояний системы S_N, состоящее из всех $R = AB$ состояний (элементов) $S_N^{(ab)}$ ($a=1, 2, ..., A$; $b=1, 2, ..., B$) при фиксированных внешних макроскопических условиях, называется равновесным ансамблем системы S_N.

Число элементов MS_N теоретически можно считать как угодно большим (при $\Delta\tau \to 0$, $B \to \infty$), и элементы можно перенумеровать по индексам a, b так, чтобы близким значениям пар чисел (a, b) соответствовали близкие по значениям (p, q) элементы $S_N^{(ab)}$.

Обозначая через $(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_k^1)$, $(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k^1)$ произвольные фиксированные значения координат и импульсов, *предполагая* конечные разности

$$d\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k^1 - \mathbf{p}_k, \; d\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k^1 - \mathbf{q}_k \tag{2.24}$$

сколь угодно малыми, фазовым объемом в точке (p, q) назовем величину

$$dpdq = d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N \equiv$$
$$\equiv dp_1^1 dp_1^2 dp_1^3 \dots dp_N^1 dp_N^2 dp_N^3 dq_1^1 dq_1^2 dq_1^3 \dots dq_N^1 dq_N^2 dq_N^3. \tag{2.25}$$

Число $R=AB$ систем ансамбля *предполагается* столь большим, что в фазовом объеме $dpdq$ в момент t заключено также большое число систем.

Системы $S_N^{(ab)}$ при различных a, b неравновероятны. Например, атом в кристалле чаще всего можно наблюдать около положения равновесия, молекулу газа почти невозможно наблюдать в момент столкновения с другой молекулой и т. д.

Обозначим через R_1 плотность числа систем ансамбля в состоянии с координатами $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_N; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_N) \equiv (p, q)$, так что $R_1(p, q)dpdq$ представляет число систем, импульсы и координаты которых находятся в объеме $dpdq$, включающем точку (p, q).

Плотностью вероятности нахождения системы S_N в состоянии с данными значениями $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_N)$, т. е. в точке (p, q), назовем предел отношения

$$f(p, q) = \left[\frac{1}{R} R_1(p, q)\right]_{R\to\infty}. \tag{2.26}$$

Для любой данной $\mathcal{F}(p, q)$ естественно назвать средней по ансамблю величину

$$\langle \mathcal{F}(p, q)\rangle_{AB} = \int\limits_{\Gamma_{AB}} \mathcal{F}(p, q) f(p, q)\, dpdq, \tag{2.27}$$

если $f(p, q)$ нормировать условием

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} f(p, q)\, dpdq = 1 \tag{2.28}$$

и макроскопически неподвижную область Γ_{AB} определить по свойствам самой системы S_N, т. е. по параметрам μ функции Гамильтона $H(p, q, \mu)$ и заданным макроскопическим внешним условиям. Уравнение нормировки (2.28) непосредственно следует из (2.26) до перехода к пределу $R \to \infty$ и означает, что число систем ансамбля R равно AB. Выражение средней по ансамблю (2.27) означает, что в нем функция $\mathcal{F}(p, q)$ встречается столько же раз, сколько и аргументы этой функции. Например, кинетическая энергия пятой частицы $[(p_5^1)^2 + (p_5^2)^2 + (p_5^3)^2]/2m_5$ встречается в ансамбле столько раз, сколько тройки чисел (p_5^1, p_5^2, p_5^3).

Средние по времени и по ансамблю для макроскопически равновесной системы S_N построены на одном и том же множестве $R = AB$ элементов $S_N^{(ab)}$ $(a = 1, 2, \ldots, A;\ b = 1, 2, \ldots, B)$, и создается впечатление, что переход от средней по времени к средней по ансамблю есть чисто формальное преобразование, т. е. они равны между собой. Это было бы действительно так, если бы конкретные опыты приводили к тождественным результатам и в каждом из них за время τ система совершала в фазовом пространстве один и тот же замкнутый цикл, т. е. множество MS_N сводилось бы к множеству состояний в одном детерминированном движении S_N при точно заданных начальных условиях. Поскольку в этом случае (p, q) однозначно определяются интегралами движения, то и $f(p, q)$ определялась бы ими, т. е. удовлетворяла бы уравнению Лиувилля. Следовательно, средняя по времени равнялась бы статистической средней. Это впечатление ошибочно, так как все перечисленные условия не выполняются. На макроскопически равновесную систему наложены лишь очень слабые ограничения, и имеется множество «допусков». (Для газа — допуски на температуру и объем баллона; независимость $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ от вещества баллона и состояния его поверхности; независимость от малых ошибок в параметрах μ и т. д.) В общем случае не существует и замкнутых циклов у детерминированных систем.

Все равновесные состояния консервативной системы S_N определены в неподвижной области Γ фазового пространства (p, q), следовательно, и в неподвижном объеме V физического пространства, т. е. макроскопически система S_N представляется неподвижной. Поэтому интегралы движения $\mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{G} = 0$ являются триви-

альными, и известен только один интеграл движения, явно не зависящий от времени, — интеграл энергии *

$$H(p, q) \equiv K(p) + U(q, \mu) = E = \text{const},$$

$$K = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2m_k} (p_k^\alpha)^2. \qquad (2.29)$$

Предположение, что в построенном выше ансамбле $f = f_N$ и функция $f_N(p, q)$ зависит только от $H(p, q)$, определяет так называемый *канонический ансамбль Гиббса*

$$f_N(p, q) = f_N(H(p, q, \mu)) = f_N(H). \qquad (2.30)$$

В каноническом ансамбле константа E имеет различные значения для разных систем ансамбля, т. е. функция $f_N(H)$ определена в $6N$-мерной связной области Γ фазового пространства и $H = E$ являются ее поверхностями уровня.

Принимаемое для равновесных систем предположение, что статистическое среднее значение любой $\mathcal{F}(p, q)$, называемое также *средним по ансамблю*,

$$\langle \mathcal{F}(p, q) \rangle = \int_{\Gamma} \mathcal{F}(p, q) f_N(H)\, dpdq \qquad (2.31)$$

равно среднему по времени (2.22)

$$\langle \mathcal{F}(p, q) \rangle = \tilde{\mathcal{F}}, \qquad (2.32)$$

называется *эргодической гипотезой* или, иногда, *эргодической теоремой*, доказанной, однако, только для некоторых частных случаев. Эргодическая гипотеза во многих случаях дает основание для трактовки введенных выше статистических средних (2.11), (2.12), (2.21) и других как наблюдаемых макроскопических параметров системы. Например, если N (а также числа сортов N_1, ..., N_γ) очень велико и система S_N из состояния (2.9) переходит в равновесное с функций распределения (2.30), то эволюция описывается функцией, определяемой уравнением (2.8), причем некоторые из статистических средних типа (2.21) представляют макроскопические наблюдаемые характеристики системы.

§ 2.2. Статистические основы механики сплошной среды

Плотность массы, скорость движения и закон сохранения массы простой системы. Общий статистический подход к описанию

* Вопрос о том, является ли при данной $H(p, q)$ интеграл (2.29) единственным, явно не зависящим от t, не решен. Есть работы, в которых предполагается существование других.

движения системы при некоторых существенных дополнительных определениях и условиях в принципе позволяет получить из уравнения Лиувилля важные для МСС законы неравновесного и неоднородного в пространстве движения системы S_N как сплошной среды. Среди них наименее ограничительным является вывод закона сохранения массы, который и приводится ниже для простой системы.

Вероятность нахождения определенной частицы с номером $k=l$, например первой ($l=1$), в единице объема с центром $\mathbf{r}$, точнее — *плотность вероятности нахождения частицы $k=l$ в точке* $\mathbf{r}$ *в момент* t при условии, что импульсы всех частиц и координаты всех остальных (кроме $k=l$) частиц имеют какие угодно значения из области $\Gamma=\Gamma_p \cup \Gamma_q$, пропорциональна $6N$—3-кратному интегралу от $f(t, p, q)$ по всем импульсам в пределах области Γ_p и по координатам в пределах области Γ_q всех частиц, кроме $k=l$, для которой $\mathbf{q}_l=\mathbf{r}$ зафиксировано.

Средним числом частиц системы S_N, находящихся в момент t в единице объема V в точке $\mathbf{r}$ пространства наблюдателя, называется величина $\nu(t, \mathbf{r})$, определяемая равенством

$$\nu = \sum_{k=1}^{N} \langle \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle, \tag{2.33}$$

т. е. математическое ожидание всех точек системы в единице объема; причем интеграл от $\nu(\mathbf{r}, t)$ по всему объему V, занимаемому системой S_N, равен числу N частиц системы:

$$\int_V \nu(\mathbf{r}, t)\, d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{N} \int_V \langle \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \rangle\, d\mathbf{r} = N,$$

$$d\mathbf{r} \equiv dV = dx^1 dx^2 dx^3.$$

Макроскопической плотностью называется величина

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \left\langle \sum_{k=1}^{N} m_k \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle. \tag{2.34}$$

В случае одинаковых масс всех частиц $\rho = m\nu$.

Макроскопическая скорость соответственно определяется через импульсы равенством

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \left\langle \sum_{k=1}^{N} \mathbf{p}_k \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle. \tag{2.35}$$

Уравнение Лиувилля (2.8) запишем в виде

$$\dot{f}_N \equiv \frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (v_k^\alpha f_N) + \frac{\partial}{\partial p_k^\alpha} (F_k^\alpha f_N) \right] = 0, \qquad (2.36)$$

где $v_k^\alpha = p_k^\alpha / m_k$ и $F_k^\alpha = -\partial H / \partial q_k^\alpha$ (F_k^α не зависит от p). Умножим (2.36) на $m_l \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r})$, $l = 1, 2, \ldots, N$, и просуммируем по l от 1 до N; результат интегрируем по области Г, т. е. вычисляем равную нулю сумму

$$\sum_{l=1}^{N} m_l \int_\Gamma \dot{f}_N (p, q, t)\, \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r})\, dp dq = 0. \qquad (2.37)$$

Очевидно, на основании определения (2.34)

$$\sum_{l=1}^{N} m_l \int_\Gamma \frac{\partial f_N}{\partial t} \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r})\, dp dq = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \sum_{l=1}^{N} m_l \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \right\rangle = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Поскольку для любых l и k согласно (2.7)

$$\int_{\Gamma_p} \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial p_k^\alpha} (F_k^\alpha f_N)\, dp = \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \int_{\Gamma_p} \frac{\partial}{\partial p_k^\alpha} (F_k^\alpha f_N)\, dp = 0$$

(так как импульс p_k^α принимает значение на границе области Γ_p), соответствующая сумма в (2.37) исчезнет; что касается слагаемых, содержащих вторые члены суммы в (2.36), они содержат выражения типа

$$\int_{\Gamma_q} \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (v_k^\alpha f_N)\, dq.$$

Для $l \neq k$ функция $\delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r})$ выйдет из-под интеграла по q_k^α, интеграл возьмется и будет равен нулю, так как координата q_k^α выйдет на границу области Γ_q; следовательно, останется сумма, которая на основании определения ρ и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ (2.34), (2.35) равна (при $l = k$)

$$\int_\Gamma \sum_{k=1}^{N} \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (p_k^\alpha f_N)\, dp dq = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho V^\alpha),$$

где x^α, V^α — компоненты $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$. Таким образом, из (2.37) получается закон сохранения массы

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\rho V^{\alpha})=0, \tag{2.38}$$

который из других соображений получается в МСС.

Уравнение сохранения импульса для массы единичного объема получается из (2.36) умножением на $\mathbf{p}_l\delta(\mathbf{q}_l-\mathbf{r})$, суммированием по всем l от 1 до N и интегрированием по Г, т. е. из векторного уравнения

$$\int\limits_{\Gamma}\left\{\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial f_N}{\partial t}\mathbf{p}_l\delta(\mathbf{q}_l-\mathbf{r})+\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\mathbf{p}_l\delta(\mathbf{q}_l-\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial q_k^{\alpha}}(v_k^{\alpha}f_N)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mathbf{p}_l\delta(\mathbf{q}_l-\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial p_k^{\alpha}}(F_k^{\alpha}f_N)\right]\right\}dpdq=0. \tag{2.39}$$

При интегрировании по области Г время t является параметром, от которого (через параметры μ) может зависеть граница области Г; на ней согласно (2.7) функция $f_N=0$ и для всякой $\Phi(p,q)$

$$\int\limits_{\Gamma}\Phi(p,q)\frac{\partial f_N(p,q,t)}{\partial t}dpdq=\frac{\partial}{\partial t}\langle\Phi(p,q)\rangle.$$

Поэтому первая сумма равна (с учетом (2.35))

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\sum_{l=1}^{N}\mathbf{p}_l\delta(\mathbf{q}_l-\mathbf{r})\right\rangle=\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t}. \tag{2.39'}$$

Вторая сумма при $l\neq k$ обращается в ноль, так как производная по таким q_k^{α} выходит за знак подынтегрального выражения

$$\mathbf{p}_l\delta(\mathbf{q}_l-\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial q_k^{\alpha}}(v_k^{\alpha}f_N)=\frac{\partial}{\partial q_k^{\alpha}}[\mathbf{p}_l v_k^{\alpha}f_N\delta(\mathbf{q}_l-\mathbf{r})]$$

и интеграл по Г равен нулю (q_k^{α} принимают значения на границе Г, и потому $f_N=0$). Значит, вторая сумма равна

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\int\limits_{\Gamma}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{p}_k\delta(\mathbf{q}_k-\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial q_k^{\alpha}}(v_k^{\alpha}f_N)\,dpdq.$$

Но по определению $\delta(\mathbf{q}_k-\mathbf{r})$ (2.20)

$$\frac{\partial}{\partial q_k^{\alpha}}\delta(\mathbf{q}_k-\mathbf{r})=-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\delta(\mathbf{q}_k-\mathbf{r})$$

и вследствие независимости $\mathbf{p}_k$, $v_k^\alpha = p_k^\alpha | m_k$, $f_N(p, q, t)$ от $\mathbf{r}$

$$\mathbf{p}_k \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (v_k^\alpha f_N) = \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} [\mathbf{p}_k \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) v_k^\alpha f_N] + \\ + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [\mathbf{p}_k \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) v_k^\alpha f_N].$$

Интеграл от первого выражения по Γ равен нулю, так как $f_N = 0$ на границе Γ; производная по x^α при подсчете суммы выходит за знак интеграла по Γ. Следовательно, вторая сумма в (2.39) равна

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \langle \mathbf{p}_k v_k^\alpha \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \rangle. \qquad (2.39'')$$

Среднее значение всех скоростей v_k^α $(k = 1, 2, \ldots, N)$ примем равным V^α, среднее значение импульсов $\mathbf{p}_k$ — равным $m_k \mathbf{V}$ и обозначим отклонения от средних

$$\Delta \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k - m_k \mathbf{V}. \qquad (2.40)$$

Тогда для (2.39″) с учетом (2.34), (2.35) получим выражение

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho V^\alpha \mathbf{V}) + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\text{кин}}^\alpha}{\partial x^\alpha} \right], \qquad (2.41)$$

где вектор

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{кин}}^\alpha = \sum_{k=1}^{N} \left\langle \frac{\Delta p_k^\alpha \Delta \mathbf{p}_k}{m_k} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle \qquad (2.41')$$

называется *кинетическим вектором внутренних напряжений* на единичной площадке с нормалью, совпадающей с осью x^α в точке $\mathbf{r}$. Три вектора $\boldsymbol{\sigma}_{\text{кин}}^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ образуют симметричный *тензор кинетических напряжений* $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$

$$\sigma_{\text{кин}}^{\alpha\beta} = \sigma_{\text{кин}}^{\beta\alpha} = \sum_{k=1}^{N} \left\langle \frac{\Delta p_k^\alpha \Delta p_k^\beta}{m_k} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle. \qquad (2.41'')$$

В последней (третьей) сумме уравнения (2.39) слагаемые при $l \neq k$ обращаются в ноль (интегрируются по p_k^α) и при $l = k$, на основании тождества

$$F_k^\alpha \mathbf{p}_k \frac{\partial f_N}{\partial p_k^\alpha} = F_k^\alpha \frac{\partial}{\partial p_k^\alpha} (\mathbf{p}_k f_N) - F_k^\alpha f_N \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial p_k^\alpha}$$

и независимости вектора силы $\mathbf{F}_k$ от импульсов $\mathbf{p}$,

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\left\langle F_k^\alpha \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial p_k^\alpha}\,\delta(\mathbf{q}_k-\mathbf{r})\right\rangle = -\mathbf{F}(\mathbf{r}, t).$$

Здесь $\partial\mathbf{p}_k/\partial p_k^\alpha = \partial\mathbf{q}_k/\partial q_k^\alpha = \mathbf{e}_\alpha$ — единичный вектор вдоль оси x^α.

Вектор

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{N}\langle \mathbf{F}_k(q, t)\,\delta(\mathbf{q}_k-\mathbf{r})\rangle \tag{2.42}$$

представляет некоторую среднюю силу, действующую на единицу объема среды в точке $\mathbf{r}$ и возникающую за счет потенциала взаимодействия всех точек системы S_N между собой и с внешними телами;

$$-F_k^\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_k^\alpha} = \frac{\partial U'(q)}{\partial q_k^\alpha} + \frac{\partial U^e(q, \mu)}{\partial q_k^\alpha} \equiv -F_k'^\alpha - F_k^{e\alpha}, \tag{2.42'}$$

где первое слагаемое дает силу, действующую на k-частицу со стороны всех других частиц системы, второе — силу со стороны внешних тел.

В результате уравнение сохранения импульса (2.39) приводится к виду

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{\text{кин}}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \mathbf{F}'(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}^e(\mathbf{r}, t), \tag{2.43}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} V^\alpha\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\alpha},$$

где $\mathbf{F}^e(\mathbf{r}, t)$ — главный вектор внешних сил, приходящихся на единицу объема в точке $\mathbf{r}$ в момент t.

В МСС предполагается, что вектор $\mathbf{F}'(\mathbf{r}, t)$ всегда приводится к *дивергентному виду*, т. е.

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}, t) \equiv -\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{e}_\alpha\sum_{k=1}^{N}\left\langle\frac{\partial U'(q)}{\partial q_k^\alpha}\,\delta(\mathbf{q}_k-\mathbf{r})\right\rangle = -\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{\text{пот}}^\alpha}{\partial x^\alpha}. \tag{2.44}$$

В некоторых случаях в статистической механике такое приведение хотя бы формально удается сделать. Пусть, например, потенциал взаимодействия частиц системы между собой $U'(q)$ представляет собой сумму потенциалов U_{mn} парного взаимодействия частиц m и n, зависящих от расстояния между ними:

$$U'(q) = \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{N}{}' U_{mn}(\rho_{mn}), \quad \rho_{mn} = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} (q_m^\alpha - q_n^\alpha)^2}, \qquad (2.45)$$

где сумма берется по всем m, n от 1 до N, кроме $m \neq n$ (отмечено знаком штрих суммы), а иначе — по всем m, n, причем $U_{mm} \equiv 0$. Входящая в (2.44) сумма легко преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U'}{\partial q_k^\alpha} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) = \sum_{m,k=1}^{N} \frac{\partial U_{mk}}{\partial q_k^\alpha} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r})$$

и затем, на основании тождества ($U_{mk} = U_{km}$)

$$\frac{\partial U_{mk}}{\partial q_k^\alpha} = -\frac{\partial U_{km}}{\partial q_m^\alpha},$$

к виду

$$\sum_{k=2}^{N} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\partial U_{km}}{\partial q_m^\alpha} [\delta(\mathbf{q}_m - \mathbf{r}) - \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r})]. \qquad (2.46)$$

Если силы парного взаимодействия частиц k и m близкодействующие, т. е. пренебрежимы при удалении частиц на расстояние порядка a, весьма малое сравнительно с характерным линейным размером объема V, а значит, и сравнительно с $\mathbf{r}$, то аргументы δ-функции, входящие в (2.46), будут отличаться на величину порядка a, т. е. их разность формально можно заменить разложением в ряд по степеням $\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_k$:

$$\delta(\mathbf{q}_m - \mathbf{r}) - \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r} + \mathbf{q}_m - \mathbf{q}_k) - \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) =$$

$$= \frac{\partial \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r})}{\partial \mathbf{q}_k} (\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_k) = \ldots = \frac{\partial \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_m) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r})}{\partial x^\beta} (q_k^\beta - q_m^\beta) + \ldots . \qquad (2.47)$$

Если ограничиться только первым (выписанным выше) членом разложения (2.47), то подстановка его в (2.46) и (2.46) — в (2.44) приводит F' к дивергентному виду, причем

$$\sigma_{\text{пот}}^\alpha = -\sum_{k=2}^{N} \sum_{m=1}^{k-1} \langle \mathbf{F}_{km} (q_k^\alpha - q_m^\alpha) \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \rangle, \qquad (2.48)$$

$$-\mathbf{F}_{km} = \frac{\partial U_{km}}{\partial \mathbf{q}_k} \equiv \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial U_{km}}{\partial q_k^\beta} \mathbf{e}_\beta .$$

Если использовать полный ряд разложения (2.47), то сумма в (2.44) также приводится к дивергентному виду и выражение (2.48) будет первым членом разложения вектора напряжения $\sigma^{\alpha}_{\text{пот}}$. Строгое доказательство возможности разложения (2.47) при подсчете суммы в (2.44) относится к теории обобщенных функций и здесь не рассматривается.

Представим *полный вектор напряжения* через его компоненты $\sigma^{\alpha\beta}$:

$$\sigma^{\alpha}=\sum_{\beta=1}^{3}\sigma^{\alpha\beta}\mathbf{e}_{\beta}=\sum_{\beta=1}^{3}\left(\sigma^{\alpha\beta}_{\text{кин}}+\sigma^{\alpha\beta}_{\text{пот}}\right)\mathbf{e}_{\beta}. \quad (2.49)$$

Три скалярных уравнения сохранения импульса из (2.43) получим в виде

$$\rho\left(\frac{\partial V^{\beta}}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}V^{\alpha}\frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}}+F^{e}_{\beta}\quad(\beta=1,2,3), \quad (2.50)$$

причем в рассматриваемом частном случае компоненты *тензора внутренних напряжений* $\sigma^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=1, 2, 3$) определятся формулами

$$-\sigma^{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{N}\left\langle\frac{\Delta p_k^{\alpha}\Delta p_k^{\beta}}{m_k}\delta(\mathbf{q}_k-\mathbf{r})\right\rangle+$$

$$+\sum_{k=2}^{N}\sum_{m=1}^{k-1}\left\langle\frac{(q_k^{\alpha}-q_m^{\alpha})(q_k^{\beta}-q_m^{\beta})}{\rho_{km}}\frac{dU_{km}}{d\rho_{km}}\delta(\mathbf{q}_k-\mathbf{r})\right\rangle \quad (2.51)$$

и, как видно, тензор напряжений симметричен: $\sigma^{\alpha\beta}=\sigma^{\beta\alpha}$.

Приведение $\mathbf{F}'$ к дивергентному виду (2.24) будет аналогичным и в более общем случае, когда потенциал U' зависит от разностей координат $q_m^{\alpha}-q_k^{\alpha}$.

Термодинамические параметры и функции системы S_N как сплошной среды не могут быть введены так же просто, как ρ, $\mathbf{v}$, $\mathbf{V}$, $\sigma^{\alpha\beta}$, если не наложить более сильных ограничений, позволяющих обобщить определения соответствующих параметров и функций в равновесных состояниях (§ 3).

В МСС чаще всего рассматривается такое неоднородное (по $\mathbf{r}$, t) движение статистической системы S_N в физическом пространстве, когда градиенты всех средних (типа ρ, $\mathbf{V}$, $\sigma^{\alpha\beta}$) по $\mathbf{r}$ и t почти всюду имеют порядок отношения их характерных значений к характерному линейному размеру области и интервалу времени монотонности. В таком случае при очень большом N (также N_1, N_2, ...) в окрестности точки $\mathbf{r}$ в объеме $dV=dx^1dx^2dx^3$, малом

сравнительно с V и настолько большом, что в нем заключена подсистема $S_{\Delta N}$ с очень большим числом частиц ΔN (ΔN_1, ΔN_2, ...), движение статистической системы $S_{\Delta N}$ будет почти однородным. Если $U'(q)$ — потенциал *близкодействия*, т. е. частицы системы S_N взаимодействуют только на расстояниях порядка размера частиц a (0.1), и если $|dx^i| \gg a$, то систему $S_{\Delta N}$ можно рассматривать как замкнутую статистическую систему, свойства которой совпадают со свойствами S_N в макроскопически однородном состоянии. Отсюда возникают различные возможности дальнейшего эффективного изучения динамики статистических систем, поскольку прямая задача построения функции $f_N(p, q, t)$ на основании уравнений (2.8), (2.9) при очень больших N (N_1, N_2, ...) представляется необозримо сложной. Отметим две из таких возможностей.

Метод квазиравновесных и близких движений, по существу, сводится к использованию свойств равновесных систем (§ 3) и отысканию функции $f_N(p, q, t)$, достаточно близкой к функции (3.20) канонического ансамбля Гиббса.

Метод кинетических уравнений относится к существенно неравновесному движению статистической системы S_N, в первую очередь — макроскопически однородному в фиксированном объеме V физического пространства. Рассматривается асимптотический случай, когда $N \to \infty$ (N_1, N_2, ... $\to \infty$), $V \to \infty$, причем так, что $\frac{N}{V} \to \frac{1}{v}\left(\frac{N_1}{N}, \frac{N_2}{N}, \ldots\right)$ конечны. Область Γ_p изменения импульсов при этом принимается бесконечной (2.16). На основании уравнения Лиувилля строятся уравнения для функций распределения различных порядков.

Для простоты рассмотрим систему S_N, состоящую из частиц только одного сорта ($N = N_1$, $N_2 = \ldots = 0$) с совершенно одинаковыми потенциалами парного взаимодействия

$$U_{km} = U(\rho_{km}),$$

т. е. систему N неразличимых частиц, каждая из которых может занимать любое положение внутри объема V. Физически такая система S_N является *классическим приближением одноатомного нейтрального газа.* Функция распределения $f_N(p, q, t)$ будет симметричной, т. е. не будет изменяться от перестановки пар ($\mathbf{q}_l$, $\mathbf{p}_l$) и ($\mathbf{q}_k$, $\mathbf{p}_k$) для любых $k, l = 1, 2, \ldots, N$. Область Γ_q изменения координат $\mathbf{q}_k$ всех точек системы одинакова и является областью трехмерного пространства наблюдателя внутри объема V. Обозначая эту область также буквой V, получим полную область изменения параметров

$$\Gamma: \begin{array}{c} -\infty < \mathbf{p}_k < \infty \\ \mathbf{q}_l \in V \end{array} \Bigg| \; k, l = 1, 2, \ldots, N. \qquad (2.52)$$

Границу области V для каждой точки $\mathbf{q}_k$ системы можно заменить отталкивающим потенциалом $U_V(\mathbf{q}_k, t)$, обращающимся в ноль внутри V и в бесконечность — на границе V. Функция Гамильтона равна

$$H \equiv H_N = \sum_{k=1}^{N} H_{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{N} U(\rho_{kl}), \quad H_{(k)} = \frac{(\mathbf{p}_k)^2}{2m} + U_V(q_k, t). \quad (2.53)$$

Функция распределения $f_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ одной частицы (безразлично какой, например первой) определяется как условная средняя, если $\mathbf{q}_1 = \mathbf{Q}_1$, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}_1$ фиксированы:

$$f_1(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1, t) = W^1 \int_{\Gamma} f_N(p, q, t)\, \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{P}_1)\, \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{Q}_1)\, d\mathbf{p} d\mathbf{q} =$$

$$= W^1 \int_{\Omega} d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2 \ldots \int_{\Omega} f_N(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1; \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2; \ldots; \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_N; t)\, d\mathbf{p}_N d\mathbf{q}_N, \quad (2.54)$$

причем, согласно (2.6),

$$\frac{1}{W^1} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1, t)\, d\mathbf{P}_1 d\mathbf{Q}_1 = 1, \quad (2.55)$$

где Ω — область шестимерного пространства изменения координат $\mathbf{Q}_1$ импульсов $\mathbf{P}_1$ одной частицы, принадлежащая Γ (2.52): $\mathbf{Q}_1 \in V$, $-\infty < \mathbf{P}_1^{\alpha} < \infty$. Следовательно, $f_1(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1, t)/W^1$ — плотность вероятности нахождения параметров частицы в точке $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_1$ в момент t.

Двухчастичная функция распределения $f_2(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1; \mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2; t)$, называемая *корреляционной функцией* распределения пар частиц, получается при замене W^1 на W^2 и умножении подынтегрального выражения в (2.54) на $\delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{P}_2)\,\delta(\mathbf{q}_2 - \mathbf{Q}_2)$, причем

$$\frac{1}{W^2} \int_{\Omega} d\mathbf{P}_1 d\mathbf{Q}_1 \int_{\Omega} f_2 d\mathbf{P}_2 d\mathbf{Q}_2 = 1.$$

Вообще s — частичная функция распределения f_s — получается как условное среднее значение $f_N(p, q, t)$, когда параметры $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{q}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ s частиц имеют фиксированные значения $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{Q}_k$:

$$f_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = W^s \int_{\Gamma} f_N(p, q, t)\, \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{P}_1)\, \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{Q}_1) \ldots$$

$$\ldots \delta(\mathbf{p}_s - \mathbf{P}_s)\, \delta(\mathbf{q}_s - \mathbf{Q}_s)\, d\mathbf{p} d\mathbf{q} =$$

$$= W^s \underbrace{\int_{\Omega} d\mathbf{p}_{s+1} d\mathbf{q}_{s+1} \ldots \int_{\Omega}}_{N-s \text{ интегралов}} f_N(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1 \ldots \mathbf{P}_s, \mathbf{Q}_s; \mathbf{p}_{s+1}, \mathbf{q}_{s+1}; \ldots; \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_N, t) \times$$

$$\times\, d\mathbf{p}_N d\mathbf{q}_N. \quad (2.56)$$

Нормирующий множитель W^s удовлетворяет условию

$$\frac{1}{W^s}\int\limits_{\Omega} d\mathbf{P}_1 d\mathbf{Q}_1 \ldots \int\limits_{\Omega} f_s(\mathbf{P},\ \mathbf{Q},\ t)\, d\mathbf{P}_s d\mathbf{Q}_s = 1. \qquad (2.57)$$

Кинетические уравнения для различных f_s получаются из уравнения Лиувилля (2.8), где H_N определено (2.53). Умножая (2.8) на

$$W^s d\mathbf{p}_{s+1}\, d\mathbf{q}_{s+1} \ldots d\mathbf{p}_N d\mathbf{q}_N$$

и интегрируя по всем значениям этих переменных при условии, что $N\to\infty$, $V\to\infty$, $V/N\to v$, т. е. по бесконечной области Γ_∞, (2.16) или (2.52) с учетом свойства потенциала $U_V(\mathbf{q}_k,\ t)$, получим после некоторых преобразований

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = [H_s;\ f_s] + \frac{1}{v}\int\limits_{\Omega} [U_{s+1};\ f_{s+1}]\, d\mathbf{p}_{s+1} d\mathbf{q}_{s+1}, \qquad (2.58)$$

где Ω — бесконечное шестимерное пространство из области Γ_∞, т. е. для любого фиксированного k

$$\Omega: -\infty < (q_k^\alpha,\ p_k^\alpha) < \infty. \qquad (2.58')$$

Здесь H_s — функция Гамильтона системы s частиц — и U_{s+1} имеют выражения

$$H_s = \sum_{k=1}^{s} \frac{(\mathbf{p}_k)^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{s} U(\rho_{kl}),$$

$$U_{s+1} = \sum_{k=1}^{s} U(\rho_{k,s+1}), \qquad (2.59)$$

и скобки Пуассона для любых двух функций Z_k, f_k от $2k$ векторов $\mathbf{p}_l$, $\mathbf{q}_l$ $(l=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ в соответствии с (2.8) имеют выражение

$$[Z_k;\ f_k] = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{\partial Z_k}{\partial q_l^\alpha}\frac{\partial f_k}{\partial p_l^\alpha} - \frac{\partial Z_k}{\partial p_l^\alpha}\frac{\partial f_k}{\partial q_l^\alpha}\right), \qquad (2.60)$$

так что $[H_s;\ f_s]$ получается отсюда при $k=s$, $Z_s=H_s$ и $[U_{s+1};\ f_{s+1}]$ — при $k=s+1$, $Z_{s+1}=U_{s+1}$.

Вместо задачи решения уравнения Лиувилля (2.8) для системы очень большого числа частиц N, т. е. для отыскания функции очень большого числа $6N+1$ переменных $(p_k^\alpha,\ q_k^\alpha,\ t;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\ \alpha=1,\ 2,\ 3)$, мы получили задачу решения бесконечной *системы зацепляющихся кинетических уравнений* ББГКИ* (2.58) при $s=$

* Цепочка Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона.

$=1, 2, ..., \infty$, причем уравнение для $f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t)$, зависящей от семи переменных, содержит под интегралом по Ω функцию f_2; уравнение для $f_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1; \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2; t)$, зависящей от тринадцати переменных, содержит, аналогично предыдущему, f_3 и т. д. Кажущееся усложнение задачи (замена одного уравнения для f_N бесконечным числом совместных уравнений для бесконечного числа функций f_s) значительно ее упрощает, так как позволяет обрывать цепочку уравнений (2.58) на малых значениях s (обычно $s=1$, иногда $s=$ $=1, 2$) или даже получать важные статистические физические свойства из незамкнутых уравнений. Первое (обрыв цепочки при малых s) возможно вследствие близкодействия потенциала $U(\rho_{kl})$: макроскопические свойства системы в окрестности точки $\mathbf{r}$ могут зависеть от взаимодействия лишь ближайших частиц. Второе (получение свойств из незамкнутой системы) целесообразно потому, что наличие второго слагаемого в правой части (2.58) приводит к возможности введения новых макроскопических параметров, которые могут обнаруживаться в макроопытах.

Выпишем подробно уравнение (2.58) для $s = 1$. Из (2.59) имеем

$$H_1 = \frac{(\mathbf{p}_1)^2}{2m} = \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{3}(p_1^\alpha)^2; \quad U_2 = U(\rho_{12}), \quad \rho_{12}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}(q_1^\alpha - q_2^\alpha)^2$$

и потому находим скобки Пуассона, входящие в (2.58):

$$[H_1;\ f_1] = -\frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{3} p_1^\alpha \frac{\partial f_1}{\partial q_1^\alpha} = -\sum_{\alpha=1}^{3} v_1^\alpha \frac{\partial f_1}{\partial q_1^\alpha},$$

$$[U_2;\ f_2] = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial U(\rho_{12})}{\partial q_1^\alpha}\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1^\alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial p_2^\alpha}\right). \tag{2.60'}$$

Учитывая, что второе слагаемое $[U_2;\ f_2]$ при интегрировании по Ω в (2.58) исчезнет, искомое уравнение для одночастичной функции распределения $f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t)$ примет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left\{-v_1^\alpha \frac{\partial f_1}{\partial q_1^\alpha} + \frac{1}{v}\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial q_1^\alpha}\,\frac{\partial f_2}{\partial p_1^\alpha}\,d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2\right\}, \tag{2.61}$$

причем сюда входит шестикратный интеграл по области

$$\Omega : (-\infty < p_2^\alpha,\ q_2^\alpha < +\infty), \quad d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2 \equiv dp_2^1 dp_2^2 dp_2^3 dq_2^1 dq_2^2 dq_2^3.$$

Формулой (2.55) введена нормировка $W^1(t)$ функции f_1, равная ее среднему значению по области Ω:

$$W^1(t) = \int_\Omega f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t)\, d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q}_1. \tag{2.62}$$

Умножая (2.61) на $d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q}_1$, интегрируя по Ω и учитывая в дальнейшем, что на границе области Ω

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) \in \text{гр}\,\Omega : f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t) = 0,$$
$$(p_1^\alpha)^\gamma f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t) = 0; \quad (q_1^\alpha)^\gamma f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t) = 0 \tag{2.62'}$$

при любом конечном числе γ, получим

$$\frac{\partial W^1}{\partial t} = 0, \quad \text{т. е. } W^1 = \text{const}. \tag{2.63}$$

Ранее формулами (2.34) и (2.33) были определены плотность $\rho(\mathbf{r}, t) = m\nu$ и число частиц $\nu(\mathbf{r}, t)$ в единице объема физического пространства в точке $\mathbf{r}$. Легко видеть, что ν и ρ могут быть выражены также формулами

$$\nu = \frac{1}{W^1} \int_{\Omega_p} f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{p}_1, \quad \rho = m\nu, \quad \Omega_p \in \Omega. \tag{2.64}$$

Формулой (2.35) был введен вектор скорости среды $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, который через функцию f_1 определяется выражением

$$\rho\mathbf{V} = \frac{1}{W^1} \int_{\Omega_p} \mathbf{p}_1 f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{p}_1. \tag{2.65}$$

Умножая (2.61) на $m d\mathbf{p}_1/W^1$ и интегрируя по Ω_p, получим сразу закон сохранения массы (2.38), так как интегральный член в (2.61) будет интегрироваться еще по p_1^α и исчезнет. Уравнения сохранения импульса (2.50) также получаются из (2.61) умножением на $p_1^\beta\, d\mathbf{p}_1/W^1$ и интегрированием по Ω_p. Для $\sigma^{\alpha\beta}_{\text{кин}}$ с учетом (2.64) получаем выражение

$$\sigma^{\alpha\beta}_{\text{кин}} = \frac{1}{W^1} \int_{\Omega_p} \frac{\Delta p_1^\alpha \Delta p_1^\beta}{m} f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{p}_1 =$$
$$= \frac{2}{v} \frac{\int_{\Omega_p} \frac{\Delta p_1^\alpha \Delta p_1^\beta}{2m} f_1 d\mathbf{p}_1}{\int_{\Omega_p} f_1 d\mathbf{p}_1}, \quad v = \frac{m}{\rho}. \tag{2.66}$$

Для производной от $\sigma^{\alpha\beta}_{\text{пот}}$ имеем

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}_{\text{пот}}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{vW^1} \int\limits_{\Omega_p} p_1^{\beta} \, d\mathbf{p}_1 \int\limits_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial q_1^{\alpha}} \frac{\partial f_2}{\partial p_1^{\alpha}} \, d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2 =$$

$$= \frac{1}{vW^1} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial q_1^{\alpha}} \, d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2 \int\limits_{\Omega_p} \left[\frac{\partial}{\partial p_1^{\alpha}} (p_1^{\beta} f_2) - \delta^{\alpha\beta} f_2 \right] d\mathbf{p}_1 =$$

$$= -\frac{\delta^{\alpha\beta}}{vW^1} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial U(|\mathbf{r} - \mathbf{q}_2|)}{\partial x^{\alpha}} f_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}; \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2; t) \, d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2, \quad (2.67)$$

где $\delta^{\alpha\beta} = \partial p_1^{\beta} / \partial p_1^{\alpha}$ — символ Кронекера (0 — при $\alpha \neq \beta$, 1 — при $\alpha = \beta$), $\mathbf{q}_1 = \mathbf{r}$, $\rho_{12} = |\mathbf{r} - \mathbf{q}_2|$.

Полагая

$$\sigma^{\alpha\beta}_{\text{пот}} = p_U(\mathbf{r}, t) \, \delta^{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial p_U}{\partial x^{\alpha}} = \frac{-1}{vW^1} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial U(|\mathbf{r} - \mathbf{q}_2|)}{\partial x^{\alpha}} f_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}; \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2; t) \, d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2, \quad (2.67')$$

уравнения сохранения импульсов получим в виде

$$\rho \left(\frac{\partial V^{\beta}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} V^{\alpha} \frac{\partial V^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right) = -\frac{\partial p_U}{\partial x^{\beta}} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}_{\text{кин}}}{\partial x^{\alpha}}. \quad (2.68)$$

Вектор $\Delta\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 - m\mathbf{V}$ представляет хаотическое движение частиц системы. Если температуру в точке $\mathbf{r}$ определить с точностью до множителя как среднее по всем скоростям значение кинетической энергии хаотического движения, т. е.

$$\frac{\int\limits_{\Omega_p} \frac{(\Delta\mathbf{p}_1)^2}{2m} f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t) \, d\mathbf{p}_1}{\int\limits_{\Omega_p} f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t) \, d\mathbf{p}_1} = \frac{3}{2} kT(\mathbf{r}, t), \quad (2.69)$$

причем T будет выражено в кельвинах, если k — постоянная Больцмана и если *среднее кинетическое давление* определить как арифметическое среднее значение диагональных компонент тензора $\sigma^{\alpha\beta}_{\text{кин}}$, т. е.

$$p_{\text{кин}} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \sigma^{\alpha\beta}_{\text{кин}} \delta^{\alpha\beta} = \frac{1}{3} (\sigma^{11}_{\text{кин}} + \sigma^{22}_{\text{кин}} + \sigma^{33}_{\text{кин}}), \quad (2.70)$$

то, составляя такую сумму на основании (2.66) и учитывая (2.69), получим $p_{\text{кин}}v = kT$. Полным давлением называется сумма $p = p_{\text{кин}} + p_U$. Таким образом, получаем уравнение состояния

$$pv = kT + vp_U, \tag{2.71}$$

где $v = m/\rho$ — удельный объем системы в точке $(\mathbf{r}, t)$.

Статистическую теорию рассматриваемой системы (одноатомного газа) можно продолжить и вывести другие соотношения. Существенно отметить, что понятия плотности ρ, средней скорости $\mathbf{V}$, кинетических составляющих тензора внутренних напряжений $\sigma^{\alpha\beta}_{\text{кин}}$ и кинетической составляющей давления $p_{\text{кин}}$, температуры T, кинетической энергии (среднее значение $(\mathbf{p}_1)^2/2m$) связаны только с одночастичной функцией распределения $f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t)$, тогда как потенциальная составляющая давления p_U, потенциальная энергия, выражающаяся, очевидно, через интеграл

$$\frac{1}{W^2}\int U(\mathbf{q}_2 - \mathbf{r})\, f_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}, \mathbf{q}_2, t)\, d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2, \tag{2.72}$$

связаны уже с двухчастичной (бинарной) функцией распределения f_2, и потому получение закона сохранения энергии потребует использования кинетического уравнения для f_2, содержащего f_3. Замыкание системы основных вводимых средних величин (ρ, $\mathbf{V}$, T, $\sigma^{\alpha\beta}$, ...) и определяющих их уравнений типа (2.38), (2.68), (2.71) в МСС производится исходя из макроскопических опытов, а в статистической механике — на основании конкретизации свойств системы S_N и некоторых гипотез. Предположение, что функция распределения f_s с наибольшим индексом s является некоторым функционалом функций с меньшими индексами (f_{s-1}, ..., f_1), очевидно, замыкает систему кинетических уравнений. Предположение, что плотность газа мала, вводит малый параметр $1/v$. Это означает, что для замыкания может быть использован один из методов малого параметра.

Не останавливаясь более подробно на статистической теории газа, отметим, что аппарат кинетических уравнений развит также для более сложных систем S_N, состоящих из частиц разного сорта и переменного состава.

§ 3. Термодинамика замкнутых равновесных систем

Состояние системы S_N равновесно, если 1) она консервативна, т. е. потенциал $U(q, \mu)$ всех внешних и внутренних сил явно не зависит от времени; 2) среднее переносное (поступательное и вращательное) движение ее отсутствует (граница объема V неподвижна, среднее количество движения и момент количества движения S_N равны нулю); 3) функция распределения $f(p, q, \mu)$ явно не зависит от времени. При этих условиях функция Гамильтона

$$H(p,\ q,\ \mu) = K(p,\ q) + U(q,\ \mu) = E,$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \bar{k}_{ij}(q)\, p_i p_j, \quad n = 3N, \tag{3.1}$$

является энергией системы, причем она постоянна для каждой системы $S_N^{(\alpha)}$ ансамбля (может быть различна для различных α). Следовательно, функция

$$f(p,\ q) = f(H,\ \theta), \tag{3.2}$$

где θ — некоторый набор параметров, является решением уравнения Лиувилля. Именно эта функция лежит в основе термодинамики замкнутых равновесных систем.

Условие нормировки функции f (2.6) переписывается в виде

$$\int\limits_{\Gamma} f(H(p,\ q,\ \mu),\ \theta)\, dp dq = 1, \tag{3.3}$$

причем существенно, что на границе области Γ функция f обращается в нуль.

Возникает вопрос: реализуются ли указанные выше условия равновесности S_N в физических средах, так как они движутся, вообще говоря, неравномерно во времени и неоднородно в пространстве? Но если рассмотреть макроскопически очень малый движущийся объем, включающий, однако, большое число одних и тех же частиц, и проследить за такой системой в течение макроскопически очень малого, но превосходящего τ_s времени, то в соответствующей подвижной системе координат система приближенно удовлетворяет условию 2, так как силы инерции переносного движения (обычно) малы по сравнению с силами взаимодействия частиц, в частности, за счет малости занимаемого такой системой объема. По свойству физических тел условие 1 не является ограничительным. Что же касается условия 3, то оно выделяет обычно класс так называемых равновесных обратимых процессов, которые возможны во многих физических средах.

Внутренней энергией $\widetilde{H}$ физического тела называется среднее по ансамблю значение энергии H:

$$\widetilde{H}(\mu,\ \theta) \equiv \langle H \rangle = \int\limits_{\Gamma} H(p,\ q,\ \mu)\, f(H,\ \theta)\, dp dq = \widetilde{K} + \widetilde{U},$$

$$\widetilde{K}(\theta) = \langle K \rangle = \int\limits_{\Gamma} K(p,\ q)\, f(H,\ \theta)\, dp dq, \tag{3.4}$$

$$\widetilde{U}(\mu,\ \theta) = \langle U \rangle = \int\limits_{\Gamma} U(q,\ \mu)\, f(H,\ \theta)\, dp dq,$$

где $\widetilde{K}$ — кинетическая (тепловая) составляющая, $\widetilde{U}$ — потенциальная.

Энергия $H(p, q, \mu)$ каждой системы $S_N^{(\alpha)}$ ансамбля, имеющая для нее постоянное значение $H=E^{(\alpha)}$, зависит от внешних параметров $\mu(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r, \ldots)$, определяющих внешнее силовое поле и границу объема V, занятого системой. Среди μ_r находятся сам объем V, геометрические параметры, определяющие форму границы объема V, координаты внешних тел, действующих на систему S_N, и т. п. Они одинаковы для всех систем $S_N^{(\alpha)}$ ансамбля. Поэтому параметры μ_r можно назвать *внешними*. Параметры θ $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, \ldots)$ называются *внутренними макроскопическими* параметрами: от них зависит f, но не H.

Равновесным процессом изменения состояния тела называется непрерывная последовательность равновесных его состояний, получаемая непрерывным изменением макроскопических внешних и внутренних параметров μ, θ; при этом, конечно, сам вид функций $H(p, q, \mu)$, $f(H, \theta)$, $H(\mu, \theta)$, ... не изменяется, т. е. их изменения за счет приращений μ_r, θ_s выражаются полными дифференциалами:

$$\delta H = \sum_r \frac{\partial H}{\partial \mu_r} \delta\mu_r = \sum_r \frac{\partial U}{\partial \mu_r} \delta\mu_r,$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial H} \delta H + \sum_s \frac{\partial f}{\partial \theta_s} \delta\theta_s,$$

$$\delta\widetilde{H} = \sum_r \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \mu_r} \delta\mu_r + \sum_s \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \theta_s} \delta\theta_s, \ \ldots \quad (3.5)$$

Эти выражения верны независимо от того, возрастают или убывают параметры μ, θ во времени; при заданных числовых значениях p, q, μ, θ, $\delta\mu$, $\delta\theta$ вариации δH, δf, $\delta\widetilde{H}$, ... суть постоянные числа, так как коэффициенты при вариациях в правых частях равенства явно от времени не зависят. Такие свойства связей между вариациями различных определяющих систему функций типичны для *обратимых процессов*.

По аналогии с определением сил, действующих на частицы системы S_N через производные от потенциала U по координатам точек, в выражении δH производные

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_r} = \frac{\partial U}{\partial \mu_r} = P_r \quad (3.6)$$

можно определить как истинные внешние силы, действующие на систему S_N со стороны внешних тел. Заметим, что так как μ_r — «координата» внешнего тела, то сила

$$-\frac{\partial U}{\partial \mu_r} = (-P_r)$$

действует на внешние тела со стороны системы.

Поскольку $H = E^{(\alpha)}$ различны для разных систем ансамбля, то различны и силы P_r. *Средней внешней силой* $\tilde{P}_r$, соответствующей параметру μ_r и действующей на тело, называется среднее по ансамблю значение P_r:

$$\tilde{P}_r = \langle P_r \rangle = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial \mu_r} f dp dq. \tag{3.7}$$

Работа $\delta' \tilde{A}$, сообщаемая телу при изменении внешних параметров, определяется суммой $\tilde{P}_r \delta\mu_r$ по r и равна, очевидно, среднему по ансамблю значению вариации функции Гамильтона $<\delta H>$:

$$\delta' \tilde{A} \equiv \sum_r \tilde{P}_r \delta\mu_r = \langle \delta H \rangle \equiv \int\limits_{\Gamma} \delta H f dp dq. \tag{3.8}$$

Отметим два важных соотношения, используемых в дальнейшем. Варьируя по параметрам μ, θ нормировочное соотношение (3.3), необходимо учитывать, что граница области интегрирования Γ зависит от некоторых из параметров μ_r; но, как уже отмечалось, значение функции f на этой границе при любом значении μ_r равно нулю. Следовательно, знак вариации по μ и θ в (3.3) можно внести под интеграл, тогда

$$\int\limits_{\Gamma} \delta f dp dq = 0. \tag{3.9}$$

По такой же причине для любой функции $\mathcal{F}(p, q, \mu, \theta)$ среднее ее значение по ансамблю

$$\tilde{\mathcal{F}} \equiv \langle \mathcal{F} \rangle = \int\limits_{\Gamma} \mathcal{F}(p, q, \mu, \theta) f(H, \theta) dp dq \tag{3.10}$$

варьируется так, как будто граница области Γ не зависит от μ, θ:

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = \delta \int\limits_{\Gamma} \mathcal{F} f dp dq = \int\limits_{\Gamma} \delta (\mathcal{F} f) dp dq. \tag{3.11}$$

Теперь получим первый основной закон термодинамики. Варьируя выражение внутренней энергии $\tilde{H}$ (3.4) по параметрам μ, θ и учитывая свойство (3.11), находим

$$\delta \tilde{H} = \int\limits_{\Gamma} \delta (H f) dp dq = \int\limits_{\Gamma} \delta H f dp dq + \int\limits_{\Gamma} H \delta f dp dq.$$

или, на основании (3.8),

$$\delta\widetilde{H} = \delta'\widetilde{A} + \int\limits_{\Gamma} H\delta f dpdq \equiv \delta'\widetilde{A} + \delta'\widetilde{Q}, \qquad (3.12)$$

где

$$\delta'\widetilde{Q} = \int\limits_{\Gamma} H\delta f dpdq. \qquad (3.13)$$

Если энергия всех систем ансамбля одинакова, т. е. $H = E^{(\alpha)} = E = \text{const}$, то согласно (3.9)

$$\delta'\widetilde{Q} = E\int\limits_{\Gamma} \delta f dpdq = 0.$$

Тело, представляемое ансамблем системы S_N, в этом случае называют заключенным в адиабатическую оболочку, процесс изменения состояния его — *адиабатическим*. Изменение внутренней энергии при этом согласно (3.12) равно работе внешних сил: $\delta\widetilde{H} = \delta'\widetilde{A}$.

В общем случае равновесного процесса из (3.12) следует, что $\delta\widetilde{H} \neq \delta'\widetilde{A}$; величина $\delta'\widetilde{Q}$ (3.13) называется *количеством тепла*, сообщаемого телу извне. Это количество в феноменологической термодинамике определено независимо и до создания статистической теории. Формула (3.13) позволяет вычислить его теоретически, если известны функции H и $f(H, \theta)$.

Назовем *энтропией* S *тела* величину, пропорциональную среднему значению по ансамблю логарифма вероятности f:

$$S(\mu, \theta) = -k\langle \ln f(H, \theta)\rangle = -k\int\limits_{\Gamma} f \ln f dpdq, \qquad (3.14)$$

где k — константа (постоянная Больцмана). Один из параметров θ_s назовем температурой тела θ_1 и потребуем, чтобы количество тепла $\delta'\widetilde{Q}$ (3.13) имело интегрирующий множитель θ_1^{-1} и с этим множителем представляло полный дифференциал (по параметрам μ, θ) энтропии S:

$$\frac{1}{\theta_1}\delta'\widetilde{Q} = \delta S. \qquad (3.15)$$

Мы потребовали, по существу, чтобы введенные количества $\delta'\widetilde{Q}$, S и θ_1 удовлетворяли второму закону феноменологической термодинамики обратимых процессов, так как (3.15) имеет форму выражения этого закона. Поэтому вывод может казаться случайным. Но ведь и количеством тепла выражение

$$\int\limits_{\Gamma} H\delta f dpdq$$

названо тоже из сопоставления формулы (3.12) с выражением первого закона термодинамики. Необходимо еще проверить, при

каких условиях справедливо уравнение (3.15), так как количество тепла $\delta'\widetilde{Q}$ уже определено выражением (3.13), вариация δS может быть найдена из (3.14), параметры θ_s еще не определены. В статистической трактовке, т. е. с учетом (3.13) и (3.14), уравнение (3.15) должно быть тождеством, как и уравнение (3.12), выражающее первый закон. Из (3.14) находим вариацию δS:

$$\delta S = -k\int_{\Gamma}\delta(f\ln f)\,dpdq = -k\int_{\Gamma}\ln f\delta f dpdq - k\int_{\Gamma}\delta f dpdq,$$

или, учитывая (3,9),

$$\delta S = -k\int_{\Gamma}\ln f\delta f dpdq. \tag{3.16}$$

Внесем выражения (3.13), (3.16) в (3.15) и перепишем полученное уравнение в виде

$$\int_{\Gamma}\left[k\ln f(H,\ \theta) + \frac{1}{\theta_1}H\right]\delta f dpdq = 0. \tag{3.17}$$

Чтобы для любой вариации δf этот интеграл равнялся нулю, в соответствии с (3.9) необходима и достаточна независимость от $(p,\ q)$ подынтегрального выражения, стоящего в квадратных скобках. Обозначая это выражение через θ_2/θ_1, т. е.

$$k\theta_1\ln f + H = \theta_2, \tag{3.18}$$

и усредняя (3.18) по ансамблю, получим

$$\theta_2 = \widetilde{H} - \theta_1 S. \tag{3.19}$$

В макротермодинамике такое выражение известно как выражение *свободной энергии* Гельмгольца $\theta_2\equiv\psi$ через внутреннюю энергию $\widetilde{H}$, энтропию S и *абсолютную температуру* $\theta_1 = T$ в градусах Кельвина, если в (3.14) множитель k является постоянной Больцмана. Таким образом, уравнение (3.15) действительно выражает второй закон термодинамики, если функция вероятности f имеет вытекающее из (3.18) выражение

$$f = e^{-(H-\psi)/kT}, \tag{3.20}$$

где T — абсолютная температура и ψ — свободная энергия

$$\psi = \widetilde{H} - TS. \tag{3.21}$$

Последняя, конечно, может быть функцией внешних параметров μ_r и температуры T.

Ансамбль системы S_N, определяемый функцией распределения f (3.20), называется *каноническим ансамблем Гиббса.*

Другой подход к получению второго закона термодинамики основывается непосредственно на рассмотрении канонического ансамбля. Пусть функция распределения f имеет вид (3.20), где k — универсальная константа, ψ и T — не зависящие от (p, q) параметры. Найдем из (3.20)

$$\psi = H + kT \ln f \tag{3.22}$$

и усредним это равенство по ансамблю; получим

$$\psi = \widetilde{H} + kT \langle \ln f \rangle. \tag{3.23}$$

Сопоставляя это выражение с выражением свободной энергии Гельмгольца, заключаем, что если T трактовать как абсолютную температуру, то $-k\langle \ln f \rangle$ должно представлять энтропию S. При такой трактовке параметров второй закон термодинамики получим непосредственно из выражения (3.13). Подставим выражение H из (3.22) в (3.13), после чего получим

$$\delta' \widetilde{Q} = \int_\Gamma (\psi - kT \ln f)\, \delta f dp dq = \psi \int_\Gamma \delta f dp dq - kT \int_\Gamma \ln f \delta f dp dq;$$

первое слагаемое правой части равно нулю на основании (3.9), во втором

$$\int_\Gamma \ln f \delta f dp dq = \delta \int_\Gamma f \ln f \, dp dq = \delta \langle \ln f \rangle,$$

следовательно,

$$\delta \langle -k \ln f \rangle = \frac{\delta' \widetilde{Q}}{T},$$

т. е. T — интегрирующий множитель количества тепла $\delta' \widetilde{Q}$ и потому $-k\langle \ln f \rangle$ есть энтропия S.

Одна из основных задач статистической термодинамики состоит в нахождении *уравнений состояния* тела, т. е. связей между внешними силами $\widetilde{P}_r$, внешними параметрами μ_r и температурой T, а также в определении энтропии S. Покажем, что если свободная энергия известна как функция μ_r и T, т. е. $\psi = \psi(\mu, T)$, где, как и прежде, μ — совокупность $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r, \ldots)$, то уравнения состояния и энтропия вполне определены. Для этого перепишем уравнения (3.12), (3.15), выражающие два основных закона термодинамики, в виде

$$\delta \widetilde{H} = \sum_r \widetilde{P}_r \delta \mu_r + \delta' \widetilde{Q}, \tag{3.24}$$

$$T \delta S = \delta' \widetilde{Q}$$

и используем их следствие

$$\delta\widetilde{H} - T\delta S = \sum_r \widetilde{P}_r \delta\mu_r.$$

Внося в это уравнение выражение $\delta\widetilde{H}$, вытекающее из (3.21),

$$\delta\widetilde{H} = \delta\psi + T\delta S + S\delta T,$$

получим основное термодинамическое соотношение

$$\delta\psi + S\delta T = \sum_r \widetilde{P}_r \delta\mu_r. \tag{3.25}$$

Отсюда получаем выражение для энтропии и уравнения состояния системы:

$$S = -\partial\psi/\partial T, \quad \widetilde{P}_r = \partial\psi/\partial\mu_r \qquad (r = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \tag{3.26}$$

Теплоемкостью системы при постоянных значениях параметров μ_r называется количество тепла, необходимое для нагревания единицы ее массы на один градус Кельвина

$$c_\mu = \frac{\delta'\widetilde{Q}}{M_N \delta T} = \frac{1}{M_N} \frac{\partial\widetilde{H}}{\partial T},$$

что при $\mu_r = \text{const}$ следует из (3.24); при этом M_N обозначает массу системы. На основании (3.21), (3.26) получаем

$$M_N c_\mu = T\,\frac{\partial S}{\partial T} = -T\,\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}. \tag{3.27}$$

Итак, основная задача сводится к определению свободной энергии $\psi(\mu,\ T)$ по заданной функции Гамильтона (энергии) системы $H(p,\ q,\ \mu)$, и для конкретных физических сред это почти всегда трудная задача. Выражение ψ через H в виде функции *интеграла состояний* $Z(\mu,\ T)$, определяемого интегралом по всей фазовой области Γ формулой

$$Z(\mu,\ T) = \int\limits_\Gamma e^{-H(p,q,\mu)/kT}\,dp\,dq, \tag{3.28}$$

находится просто из условия (3.3) нормировки функции f (3.20)

$$\int\limits_\Gamma e^{-(H-\psi)/kT}\,dp\,dq = e^{\psi/kT} Z = 1.$$

Отсюда

$$\psi(\mu,\ T) = -kT \ln Z(\mu,\ T). \tag{3.29}$$

Но вычисление интеграла состояний (3.28) для конкретных заданных физических сред всегда сложно. Большие трудности представляет и составление выражения функции Гамильтона H.

Для простых систем, т. е. состоящих из частиц, которые достаточно точно представимы материальными точками, выражение интеграла Z (3.28) несколько упрощается, так как для них

$$H = \sum_{i=1}^{n=3N} \frac{p_i^2}{2m} + U(q, \mu).$$

Интеграл состояний представляется в виде произведения двух интегралов: одного — по области Γ_q от функции, зависящей только от q, который обозначим

$$D(\mu, T) = \Big(\int_{\Gamma_q} e^{-U(q,\mu)/kT}\, dq\Big)^{2/3N}, \tag{3.30}$$

и интеграла

$$I(T) = \int_{\Gamma_p} e^{-\frac{1}{2kT}\sum_{i=1}^{3N} p_i^2/m}\, dp, \tag{3.31}$$

причем, конечно,

$$dq = dq_1 dq_2 \ldots dq_n,$$

$$dp = dp_1 dp_2 \ldots dp_n, \quad n = 3N.$$

Обычно предполагается, что область Γ_p изменения импульсов бесконечна, т. е. каждый импульс p_i изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому интеграл I (3.31) представляет произведение $n=3N$ интегралов вида

$$I_i(T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_i^2/2kTm} dp_i = \sqrt{2\pi kTm},$$

т. е. равен

$$I(T) = (B_1 T)^{3N/2}, \quad B_1 = 2\pi km. \tag{3.32}$$

Таким образом,

$$Z(\mu, T) = [B_1 T D(\mu, T)]^{3N/2}, \tag{3.33}$$

и потому для простых систем согласно (3.29), (3.21), (3.26)

$$\psi = -\frac{3}{2} NkT\, [\ln T + \ln D(\mu, T) + \ln B_1],$$

$$\widetilde{H} = \psi - T\frac{\partial\psi}{\partial T}. \tag{3.34}$$

В качестве простейшего примера физической равновесной системы рассмотрим *разреженный одноатомный газ*, заключенный в объеме V. Атомы на больших расстояниях не взаимодействуют, имеют пути пробега в пределах всего объема V и кратковременно взаимодействуют только при «столкновениях». Поэтому такой газ можно рассматривать как *идеальный*, т. е. потенциальную энергию U положить равной нулю. Из (3.30)

$$D^{3N/2} = \int\limits_{\Gamma_q} dq = \int\limits_{\Gamma_q} dq_1\, dq_2\, dq_3, \;\ldots\;, dq_{3N} = \Big(\int\limits_V dq_1\, dq_2\, dq_3\Big)^N = V^N,$$

так как в произведении dq каждое последовательно одно за другим расположенное произведение трех дифференциалов декартовых координат различных точек образует дифференциал объема dV

$$dV = dq_1\, dq_2\, dq_3 = dq_4\, dq_5\, dq_6 = \ldots$$

и все координаты изменяются в пределах всего объема V. Следовательно,

$$D = V^{2/3}, \tag{3.35}$$

причем $\mu = V$ — единственный внешний параметр системы. Из (3.34) находим свободную и внутреннюю энергии газа

$$\psi = -\frac{3}{2} NkT\left[\ln T + \frac{2}{3}\ln V + \text{const}\right], \tag{3.36}$$

$$\widetilde{H} = \frac{3}{2} NkT.$$

Поскольку для рассматриваемого газа

$$\widetilde{H} = \langle H\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^2}{m}\Big\rangle = N\left(\frac{3}{2}kT\right),$$

то $3kT/2$ есть средняя кинетическая энергия одного атома

$$\frac{\widetilde{mv_k^2}}{2} = \frac{3}{2}kT. \tag{3.37}$$

Внешней силой для нашего объема V газа является давление $-p\,(p>0)$, так как работа $\delta' A$, сообщаемая газу, равна

$$\delta' A = -pdV.$$

Из (3.26) и (3.36) находим выражение энтропии и уравнение состояния:

$$S = Nk[\ln(VT^{3/2}) + \text{const}],$$

$$p = -\frac{\partial\psi}{\partial V} = \frac{NkT}{V}, \quad pV = NkT \equiv RT. \qquad (3.38)$$

Теплоемкость при постоянном объеме при $M_N = Nm$ на основании (3.27) равна

$$c_v = \frac{3k}{2m}.$$

Из (3.37) найдем характерную скорость атома

$$\tilde{v}_C = \sqrt{\tilde{v}_k^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 0{,}16\sqrt{\frac{T}{M}} \text{ км} \cdot \text{с}^{-1},$$

где M — молекулярный вес.

Неточность уравнения состояния (3.38) увеличивается с увеличением давления p. В табл. 2 дано значение pV/RT для тех же газов при различных p. Поправка для больших давлений и температур может быть найдена при учете потенциала взаимодействия молекул $U(q)$; тогда получается уравнение состояния:

Таблица 2

Вещество	$p=1$ атм	$p=50$ атм	$p=1000$ атм
He	1,0005	1,024	1,44
Ar	0,9999	0,971	1,675
N_2	0,9998	0,996	1,99

* В системе СИ давление p измеряется в паскалях (Па)·1 атм = $1 \cdot 10^5$ Па.

$$\frac{pV}{RT} = 1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \ldots .$$

Коэффициенты $B(T)$, $C(T)$ определяются путем вычисления интеграла состояний Z.

Используем еще некоторые формулы для средних величин, вытекающие из кинетической теории газа.

Длина l свободного пробега атома, имеющего эффективный диаметр d, выражается через скорость $\tilde{v}_C$, число молекул в единице объема N/V и число столкновений одной молекулы в единицу времени $n_{\text{ст}}$:

$$l = \frac{\tilde{v}_C}{n_{\text{ст}}}, \quad n_{\text{ст}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{V} N d^2 \tilde{v}_C.$$

Сведения о некоторых газах даны в табл. 3 для $T=300$ К.

Таблица 3

Вещество	M	d, Å	l, Å	$n_{\text{ст}}$, с^{-1}	$\tilde{v}_C$, км·с^{-1}
He	4,0	2,2	1936	$6{,}5\cdot 10^9$	1,26
Ar	39,9	3,6	694	$5{,}7\cdot 10^9$	0,40
N_2	28,0	3,7	654	$7{,}3\cdot 10^9$	0,475

Потенциальную энергию $U(q)$ простой системы часто представляют в виде суммы потенциалов парного взаимодействия частиц типа (0.1)

$$U(q) = \sum_{k_1, k_2} U(|\mathbf{r}_{k_1k_2}|), \tag{3.39}$$

где $\mathbf{r}_{k_1k_2}$ — радиус-вектор, соединяющий k_1-ю и k_2-ю частицы

$$\mathbf{r}_{k_1k_2} = \mathbf{r}_{k_2} - \mathbf{r}_{k_1}.$$

Обозначая $\mathbf{r}_k^0$, $\mathbf{q}_k$ — начальный постоянный радиус-вектор k-й частицы и вектор ее смещения относительно точки $\mathbf{r}_k^0$, так что

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k^0 + \mathbf{q}_k,$$

получим выражение $U(q)$ как функции всех q_i и начальных координат точек. Для идеального кристаллического тела с периодической решеткой, находящегося в равновесном состоянии, при малых колебаниях атомов около положения равновесия $U(q)$ можно разложить в ряд по q_i; значениям $q_i=0$ соответствует положение равновесия и потому

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{q_j=0} = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ 3N).$$

Ограничиваясь квадратичными членами разложения, получим

$$U = U^0 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, q_i q_j,\ \ n = 3N, \tag{3.40}$$

где c_{ij} — постоянные взаимодействия, U^0 — начальная энергия в состоянии $q_i=0$. Интеграл состояний Z в этом случае имеет вид (3.33), причем интеграл D (3.30) можно вычислить, если допустить, что все координаты q_i изменяются в одинаковой области $(-\infty \leqslant q_i \leqslant \infty)$. При этом условие $f=0$ на границах Γ_p и Γ_q выполняется, так как квадратичная форма (3.40) положительна. Предполагаем, что область изменения импульсов Γ_p также бес-

конечна ($-\infty \leqslant p_i \leqslant \infty$). Вычисление интеграла D в рассматриваемом случае основывается на приведении положительной квадратичной формы к каноническому виду

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} q_i q_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i^2, \tag{3.41}$$

$$|c_{ij}| = a_1 a_2 \ldots a_n; \tag{3.42}$$

область изменения новых переменных принимается бесконечной ($-\infty \leqslant \xi_i \leqslant \infty$). Следовательно,

$$D = \Bigl(\int_{\Gamma_\xi} e^{-\frac{1}{2kT}\sum_{1}^{n} a_i \xi_i^2} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n\Bigr)^{2/n} e^{-\frac{2U_0}{nkT}}, \tag{3.43}$$

и поэтому по аналогии с (3.31) имеем

$$D = \frac{2\pi kT}{c} e^{-\frac{2U_0}{nkT}}, \quad c = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} = |c_{ij}|^{1/n}. \tag{3.44}$$

По формуле (3.34) находим свободную энергию и по (3.27) — коэффициент теплоемкости (при $M_N = n/3m$):

$$\psi = -nkT \ln T + c_1 T + U_0,$$

$$c_v = -\frac{T}{M_N} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} = \frac{3k}{m},$$

причем предполагается, что энергия U_0 не зависит от температуры; c_1 — некоторая постоянная, не зависящая ни от температуры, ни от равновесной конфигурации системы (параметров μ). Как видим, теплоемкость c_v в расчете на один атом постоянна. Для кристаллов это подтверждается в опыте только при средних и сравнительно низких температурах. При очень низких температурах возникают квантовые эффекты, и потому сделанный расчет неточен. При высоких — он требует уточнения в представлении потенциальной энергии (3.39), так как квадратичная форма (3.40) недостаточна. Это ясно на примере потенциала «6—12» Леннарда—Джонса. В формулах (0.1) a — равновесное расстояние между атомами, силы взаимодействия любой ближайшей пары равны нулю при $q_i = 0$, т. е. натяжение кристалла равно нулю, и колебания происходят около этого положения равновесия, причем это чисто тепловые колебания (параметры $\mu = 0$). Полагая в (0.1) $r = a + u$ и обозначая $\varepsilon = u/a$, имеем

$$U = 2k\theta_1 [-(1+\varepsilon)^{-6} + (1+\varepsilon)^{-12}] = \mathrm{const} + 36\, k\theta_1 \frac{u^2}{a^2} + \ldots.$$

Но такое разложение, ограничивающееся выписанным квадратичным членом, как видно из равенства

$$(1+\varepsilon)^{-12} + e^{-12\ln(1+\varepsilon)} = e^{-12\varepsilon - \dots},$$

удовлетворительно хотя бы при $|\varepsilon| \leqslant 0{,}05$, причем в (3.43) a_i — порядка 72 $k\theta_1/a^2$ и любой из перемножаемых интегралов имеет оценку

$$\int e^{-\frac{36\theta_1 u^2}{Ta^2}}\,du.$$

Чтобы пределы интеграла можно было взять $-\infty \leqslant u \leqslant \infty$, необходимо, чтобы абсолютная температура была менее нескольких десятков градусов по Кельвину, т. е.

$$\frac{36\,\theta_1}{T}\,0{,}05^2 > 2, \text{ или } T < 0{,}05\,\theta_1.$$

Глава II
КИНЕМАТИКА И ВНУТРЕННИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

§ 4. Основные понятия и уравнения механики сплошной среды

Будем рассматривать настолько большие тела, что весьма малые их части объема dV содержат достаточно много частиц, и потому для этих малых областей тела можно ввести понятия макроскопических величин плотности тела, перемещения, скорости, ускорения, внешних сил, внутренней энергии и других в смысле средних по ансамблю (гл. I, § 2). Идеализация истинного физического тела в МСС состоит в том, что все рассматриваемые средние величины принимают в качестве истинных. Количество и математическая природа вводимых средних величин таковы, что с достаточной точностью можно описать внутреннее состояние тела и взаимодействие между телами. В основах МСС главным образом рассматриваются механические и тепловые взаимодействия и деформации малых объемов, причем иногда учитывается действие на них электромагнитных полей, химических реакций и др.

Для изображения состояний и процессов в МСС используется трехмерное евклидово пространство с различными системами координат и классическое время. Выбор системы координат произволен и не должен сказываться на физических следствиях получаемых уравнений. Значит, *математические объекты, характеризующие физические явления, не должны зависеть от частного выбора системы координат, а физические законы должны выражаться через эти объекты математическими соотношениями, инвариантными относительно преобразований системы координат.*

Основные математические объекты МСС суть тензоры различных порядков: нулевого — скаляры (плотность, энергия и др.), первого — векторы (радиус-вектор, поток тепла, скорость и др.), второго — тензоры деформаций, внутренних напряжений и др. *Все эти тензоры считаются непрерывно дифференцируемыми* достаточное число раз по координатам и по времени, следовательно, ограничены вместе с их производными в области тела.

Определения основных величин в МСС можно рассматривать как априорные, и тогда получающиеся уравнения, подобно закону

Ньютона для точки $m\ddot{x}=F_x$, станут содержательными законами только на основании экспериментально обоснованных гипотез, устанавливающих дополнительные связи между введенными величинами. В случае $m\ddot{x}=F_x$ дополнительная связь дается гипотезой $F_x=f(x, \dot{x}, t)$. Решение уравнения $m\ddot{x}=f(x, \dot{x}, t)$ составляет математическую, а нахождение $F_x=f(x, \dot{x}, t)$ — физическую задачу. Стремление сохранить понятия и общий вид (форму) соотношений между вводимыми величинами такими же, как в механике системы и термодинамике, подсказывает целесообразный набор и характер вводимых в МСС величин. Каждое из вводимых ниже определений изучающему МСС целесообразно сопоставить с соответствующим средним по ансамблю (по времени), считая, что системе S_N соответствует некоторая конечная (m) или «бесконечно малая» (ρdV) масса.

Пусть G — произвольная конечная область неподвижного пространства наблюдателя, $\boldsymbol{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$ — радиус-вектор некоторой его точки, V — объем, Σ — граница G, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали в какой-нибудь точке $\boldsymbol{x}_\Sigma$ границы Σ, $dV=dx_1dx_2dx_3$ — элемент объема; $d\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\nu}d\Sigma$ — вектор — элемент площади поверхности Σ.

Плотностью среды в некоторой точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени t назовем неотрицательную однозначную функцию $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, определенную в области G и на границе Σ, а также в окрестности Σ со стороны внешней нормали $\boldsymbol{\nu}$, причем такую, чтобы *массой среды* в объеме V была величина интеграла по объему V области G:

$$m=\int_V \rho\, dV. \tag{4.1}$$

Координатой центра масс называется точка $\boldsymbol{x}_C$, определяемая равенством

$$m\boldsymbol{x}_C=\int_V \boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x}, t)\, dV. \tag{4.2}$$

Расширенную область G, включающую границу Σ и окрестность со стороны внешней нормали, обозначим G^*. Предполагая G односвязной и стягивая ее внутрь G^* к точке $\boldsymbol{x}$, заключаем, что $\rho(\boldsymbol{x}, t)dV$ есть масса среды в объеме dV, а $\boldsymbol{x}_C$ отличается от $\boldsymbol{x}$ на величину порядка $\sqrt[3]{dV}$ по модулю.

Пусть дано поле вектора $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, называемого скоростью среды. Величину $\rho dV\mathbf{v}$ назовем импульсом, или количеством движения массы ρdV; $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ — *вектором скорости массы* ρdV. *Количеством движения массы* m естественно назвать тогда выражение

$$m\mathbf{v}_C=\int_V \rho\,\mathbf{v}\, dV, \tag{4.3}$$

$\mathbf{v}_C$ — *вектором скорости центра масс.*

Движущейся границей Σ_g (с внутренним объемом V_g) *неизменной массы* m_g среды называется граница Σ односвязной области G, любая точка M которой при изменении времени t на $t+dt$ перемещается по нормали на величину $\mathbf{v}\boldsymbol{\nu}dt$, оставаясь в области G^*, причем $\mathbf{v}$ и внешняя нормаль $\boldsymbol{\nu}$ берутся в одной и той же точке M на Σ_g. Скорость изменения объема V_g области, занимаемой неизменной массой, будет

$$\frac{dV_g}{dt} = \int_{\Sigma_g} \mathbf{v}\,\boldsymbol{\nu}\,d\Sigma. \tag{4.4}$$

Ниже на выкладках, сопровождающих утверждения и определения, можно не сосредоточивать особого внимания, так как они обстоятельно делаются в следующих параграфах.

Среда с массой m_g, заключенная внутри движущейся поверхности, называется *частицей тела*, или *физической частицей*; в частности, *бесконечно малой* частицей будем называть среду с массой ρdV.

Координата $\boldsymbol{x}_g(t)$ центра массы частицы:

$$\boldsymbol{x}_g = \frac{1}{m_g}\int_{V_g} \boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x}, t)\,dV, \tag{4.5}$$

как и ее скорость $\mathbf{v}_g(t)$:

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{m_g}\int_{V_g} \rho\,\mathbf{v}\,dV, \tag{4.6}$$

будут изменяться со временем.

Стремясь сохранить кинематическое соотношение механики системы материальных точек между скоростью и координатой центра масс, положим

$$\mathbf{v}_g(t) = \frac{d\boldsymbol{x}_g(t)}{dt}. \tag{4.7}$$

Стягивая G в точку $\boldsymbol{x}$, получим из (4.5), (4.6)

$$\boldsymbol{x}_g = \boldsymbol{x} + 0(\sqrt[3]{dV}); \quad \mathbf{v}_g = \mathbf{v} + \text{малая высшего порядка.}$$

Таким образом, *значение* $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ *в точке* $\boldsymbol{x}$ можно рассматривать как скорость движения бесконечно малой частицы или точки среды с координатой $\boldsymbol{x}$ в момент t. Если $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор бесконечно малой частицы, меняющийся по закону $\boldsymbol{x}(t)$, то ее скорость $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ равна $\dot{\boldsymbol{x}}$. Отсюда получается дифференциальное уравнение движения бесконечно малой частицы:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{v}(x, t). \qquad (4.8)$$

Решение этого уравнения при начальном условии

$$t = 0, \ x = \mathbf{x} \qquad (4.9)$$

дает *закон движения точки среды*

$$x = x(\mathbf{x}, t). \qquad (4.10)$$

По свойству функции $\mathbf{v}(x, t)$ решение (4.10) однозначно и непрерывно по $\mathbf{x}$, t, откуда следует непрерывность преобразования начальной области, занятой средой, в область, занятую ею в момент t.

Разность

$$\mathbf{u} = x - \mathbf{x} \qquad (4.11)$$

называется *вектором перемещения* бесконечно малой частицы и на основании (4.10) может рассматриваться, как и все другие приписываемые ей величины, как функция либо $\mathbf{x}$, t, либо x, t.

Понятие плотности ρ сплошной среды в МСС доопределяется требованием, чтобы масса, заключенная внутри границы Σ_g, не изменялась во времени, т. е.

$$\frac{dm_g}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int\limits_{V_g} \rho(\mathbf{x}, t)\, dV = 0. \qquad (4.12')$$

Именно это требование ставит величину ρ в соответствие постоянству числа частиц системы S_N, а $\mathbf{v}$ — средней по ансамблю скорости системы (гл. I) и называется *законом сохранения массы*. Соотношение (4.12′) чисто формально может быть приведено к виду (2.38)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \qquad (4.12)$$

На основе понятия частицы естественно вводится понятие *массовой силы*, действующей на частицу, как интеграла по V_g от $\mathbf{F}(x, t)\rho dV$, и потому полевой вектор $\mathbf{F}(x, t)$ рассматривается как сила, действующая на единицу массы, а $\mathbf{F}\rho Vd$ — на объем $(dV)_g$ бесконечно малой частицы.

Также вводится *ускорение* $\mathbf{w}(x, t)$ бесконечно малой физической частицы:

$$\mathbf{w}(x, t) = \frac{d\mathbf{v}(x, t)}{dt},$$

где x удовлетворяет уравнениям (4.8), (4.10).

Так как $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$, то

$$\mathbf{w} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{x}}, \tag{4.13}$$

где конвективное ускорение, т. е. вектор $\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$, имеет компоненты

$$v_1\frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_i}{\partial x_3}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.14}$$

Скорость изменения во времени какой-нибудь функции $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$, характеризующей физические свойства частицы в $(\boldsymbol{x}, t)$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}}, \tag{4.15}$$

где

$$\mathbf{v}\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}} = v_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \tag{4.16}$$

называется *полной, или субстанциональной*, производной φ. Согласно (4.13) ускорение есть полная производная скорости по времени.

Кинетическая энергия K_g частицы в объеме V_g, *внутренняя энергия* U_g, *энтропия* S_g и другие *экстенсивные* (пропорциональные массе частицы) величины вводятся по их определению для постоянной массы m_g, т. е. соответственно

$$K_g = \int\limits_{V_g} \frac{\rho v^2}{2}\, dV, \quad U_g = \int\limits_{V_g} \rho u\, dV, \quad S_g = \int\limits_{V_g} \rho s\, dV, \ \ldots, \tag{4.17}$$

где u, s — плотности внутренней энергии и энтропии в точке среды. *Свободная энергия* $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ определяется соотношением

$$\psi = u - Ts, \tag{4.18}$$

совпадающим с определением (3.21). *Температура* $T(\boldsymbol{x}, t)$ и другие *интенсивные* величины вводятся как некоторые полевые функции $\boldsymbol{x}$, t; все эти функции ниже доопределяются уравнениями.

Изучаемые в МСС величины являются аналогами величин классической и статистической механики замкнутой системы, хотя исторически они введены в МСС до создания статистической механики и совершенно независимо. (Некоторые из них введены в статистическую механику позднее как аналоги понятий МСС, например понятия напряжений, деформаций, потока тепла.)

Вводимые в МСС для m_g аналоги уравнений количества движения и момента количества движения абсолютно твердого тела приводят к понятию внутреннего напряжения $\mathbf{P}_\nu$.

Поскольку векторы внешней массовой силы $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}, t)$ и ускорения $\mathbf{w}(\boldsymbol{x}, t)$ уже введены, найдем разность $\mathcal{P}_g$:

$$\int\limits_{V_g} \rho(\mathbf{w}-\mathbf{F})\,dV = \mathcal{P}_g. \tag{4.19}$$

На основании ранее введенных определений левая часть (4.19) равна $m_g\mathbf{w}_g - m_g\mathbf{F}_g$ и поэтому

$$m_g\mathbf{w}_g - m_g\mathbf{F}_g = \mathcal{P}_g, \tag{4.20}$$

а при стягивании Σ_g к точке $\mathbf{x}$ отсюда получается

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{F} + \mathcal{P}(\boldsymbol{x}, t). \tag{4.21}$$

По аналогии с динамикой абсолютно твердого тела $\mathcal{P}_g$ *трактуется как сумма всех сил, действующих на поверхность* Σ_g тела (сумма всех сил, действующих внутри объема V в (4.19) уже учтена). Следовательно, необходимо ввести плотность вектора силы $\mathcal{P}_\nu(\boldsymbol{x}, t)$ в каждой точке поверхности Σ_g и понимать ее как действие в этой точке на Σ_g части тела, находящейся вне Σ_g. При таком понимании мы должны считать $\mathcal{P}_\nu(\boldsymbol{x}, t)$ зависящим не только от $\boldsymbol{x}$, t, но и от ориентации площадки $d\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\nu}d\Sigma$, т. е. от $\boldsymbol{\nu}$. Значит, $\mathcal{P}_\nu$ — сложный вектор, структуру которого надо выяснить.

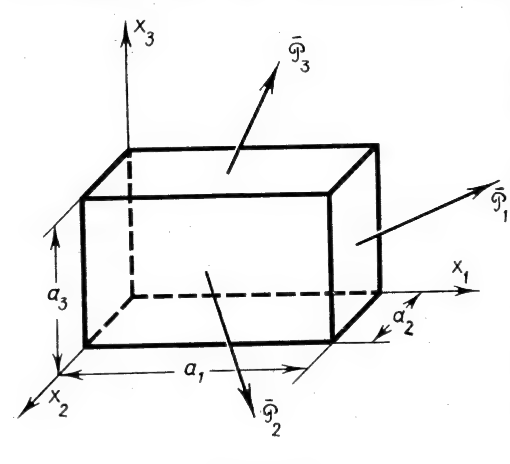


Рис. 4. 1

Пусть поверхность Σ_g в момент t совпадает с поверхностью малой области, имеющей вид прямоугольного координатного параллелепипеда (рис. 4.1) с бесконечно малыми ребрами a_1, a_2, a_3. На каждой грани $\boldsymbol{\nu}$ постоянно, координаты $\boldsymbol{x}$ отличаются между собой на величины порядка a_1, a_2 или a_3 и, значит, с точностью до бесконечно малых $\mathcal{P}_\nu$ постоянны в пределах каждой грани. Главный вектор сил, действующих со стороны поверхности на объем $dV = a_1a_2a_3$, получим сложением всех векторов $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{\nu i}$ ($i = 1, 2, 3$) ($\boldsymbol{\nu}_i$ — единичный вектор, направленный по оси x_i). Обозначая штрихом и двумя штрихами значения этих векторов на противоположных гранях, получаем главный вектор поверхностных сил, действующих на параллелепипед с ребрами a_1, a_2, a_3.

$$\mathcal{P}_g = a_2 a_3 (\mathcal{P}_1'' - \mathcal{P}_1') + a_3 a_1 (\mathcal{P}_2'' - \mathcal{P}_2') + a_1 a_2 (\mathcal{P}_3'' - \mathcal{P}_3').$$

Применив теперь соотношение (4.19), получим с точностью до малых высшего порядка

$$(\rho \mathbf{w} - \mathbf{F}) a_1 a_2 a_3 = \mathcal{P}_g \equiv a_2 a_3 \Delta \mathcal{P}_1 + a_3 a_1 \Delta \mathcal{P}_2 + a_1 a_2 \Delta \mathcal{P}_3, \quad (4.22)$$

где $\Delta \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i'' - \mathcal{P}_i'$.

Поскольку эти разности согласно (4.22) имеют порядок a,

$$\Delta \mathcal{P}_i = \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial x_i} a_i + 0(a^2), \quad (4.23)$$

т. е. они стремятся к нулю при $a_i \to 0$, то, следовательно, справедлив *закон равенства действия и противодействия:* $\mathcal{P}_i' = \mathcal{P}_i''$. Внося значения (4.23) в (4.22) и сокращая на $a_1 a_2 a_3$, получим (4.21), причем вектор $\mathcal{P}$ имеет дивергентный вид (§ 2.2)

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{P}_i(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_i}. \quad (4.24)$$

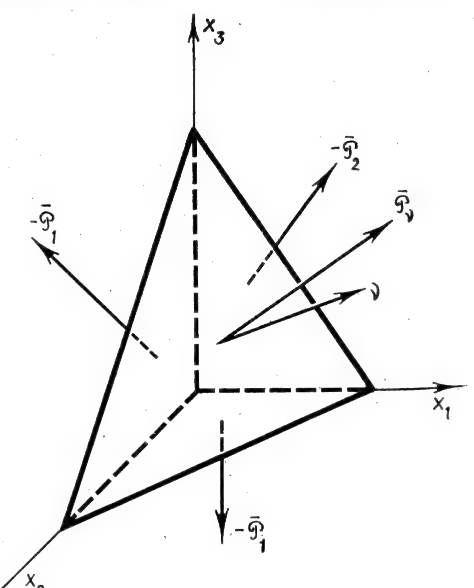


Рис. 4. 2

Если применить соотношение (4.20) к координатному тетраэдру (рис. 4.2) с наклонной плоскостью, имеющей внешнюю нормаль $\boldsymbol{\nu}$ с ее направляющими косинусами ν_i ($i = 1, 2, 3$), то аналогичными выкладками получим выражение плотности силы $\mathcal{P}_\nu$ на наклонной площадке через координатные векторы $\mathcal{P}_i$:

$$\mathcal{P}_\nu(\boldsymbol{x}, t) = \Sigma \mathcal{P}_i \nu_i. \quad (4.25)$$

По определению подчиняющиеся таким преобразованиям векторы образуют объект, не зависящий от выбора системы координат (x_i), называемый в МСС *тензором внутренних напряжений.* Здесь мы обозначим его $\tilde{\mathcal{P}}$; он вполне определен векторами $\mathcal{P}_i$ или их компонентами, обозначаемыми σ_{ij} в пространстве наблюдателя (x_i):

$$\mathcal{P}_i = \sigma_{i1} \mathbf{e}_1 + \sigma_{i2} \mathbf{e}_2 + \sigma_{i3} \mathbf{e}_3 \equiv \sigma_{ij} \mathbf{e}_j. \quad (4.25')$$

Определение и уравнение *момента количества движения* m_g вводится аналогично, и в результате доказывается, что тензор $\tilde{\mathcal{P}}$ симметричен, т. е. для его компонент справедливы равенства $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ (если нет специального внешнего моментного поля сил).

Умножая выражение (4.21) на $\mathbf{v}$ и интегрируя результат по объему V_g массы m_g, после преобразований получаем *закон сохранения механической энергии*

$$\frac{dK_g}{dt}+W=A, \tag{4.26}$$

где A называется мощностью массовых сил $\mathbf{F}$ в объеме V_g и поверхностных сил $\mathcal{P}_\nu$ на Σ_g, W — мощностью внутренних напряжений (тензора $\tilde{\mathcal{P}}$):

$$A=\int_{V_g}\rho\,\mathbf{F}\mathbf{v}\,dV+\int_{\Sigma_g}\mathcal{P}_\nu\,\mathbf{v}\,d\Sigma,$$

$$W=\int_{V_g}W_1\,dV;\qquad W_1=\sum_{ij=1,2,3}\sigma_{ij}v_{ij}, \tag{4.27}$$

причем W_1 — плотность мощности. При этом возникают величины v_{ij}, образующие *тензор скорости деформации* с компонентами

$$v_{ji}=v_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \tag{4.28}$$

вполне определяемый вектором $\mathbf{v}(\boldsymbol{x},t)$. В МСС вводится также понятие *тензора деформаций* ε_{ij}, компоненты которого выражаются через производные вектора перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$.

Кинематический смысл v_{ij} и ε_{ij} состоит в том, что они однозначно определяют соответственно скорость изменения и изменение формы границы рассматриваемой физической частицы, которая при $t=t_0$ заключена в бесконечно малом кубике с ребром a^0; оказывается, что этот кубик в любой другой момент $t\geqslant t_0$ становится косоугольным параллелепипедом с размерами ребер порядка a^0, *изменение объема* определяется плотностью $\rho(\boldsymbol{x},t)$, которая однозначно выражается через тензор ε_{ij}.

Термодинамические соотношения в МСС вводятся в предположении, что малую частицу с массой m_g можно рассматривать как термодинамическую систему с макроскопически однородным по объему распределением средних по ансамблю, причем время τ_s системы мало настолько, что бесконечно малый с точки зрения МСС *интервал времени dt очень велик сравнительно с τ_s и малая с позиций МСС частица $m_g=\rho dV_g$ является системой S_N с очень большим числом N частиц*. К этому есть основания, так как масштабы рассматриваемых в МСС времен t и размеров тел l пред-

полагаются несоизмеримыми с их масштабами для *представительных* систем статистической механики.

Применительно к m_g, имеющей форму кубика единичного объема, мощность W_1 является секундной работой внешних по отношению к m_g сил $\mathcal{P}_i$. За время dt работа их будет равна $W_1 dt$, приращение внутренней энергии равно $\rho \frac{du}{dt}\, dt$. *«Сообщаемое тепло»* обозначим $\dot{Q}dt$ и положим в соответствии с *законом сохранения энергии*

$$\rho \frac{du}{dt} = W_1 + \dot{Q}, \tag{4.29}$$

причем u, W_1, $\dot{Q}$ — функции $(\boldsymbol{x}, t)$ при условиях (4.8), (4.10). Система S_N, составляющая m_g, за время $t - t_0$ прошла через последовательность очень большого числа различных состояний, медленно и мало меняющихся. Кроме внутреннего параметра — температуры $T(\boldsymbol{x}, t)$ — внешними параметрами S_N являются изменяющийся обратно пропорционально $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ объем и «перекосы кубика», характеризуемые тензором $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$. Так как длительный процесс за время $t - t_0$ в целом неравновесный, то компоненты тензора деформаций ε_{ij}, вообще говоря, не являются параметрами состояния, определяющими плотность внутренней энергии $u(\boldsymbol{x}, t)$.

Второй закон — *баланса энтропии* $s(\boldsymbol{x}, t)$ — в МСС обычно записывается по аналогичным соображениям в виде

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \dot{Q} + w^*, \quad w^* \geqslant 0, \tag{4.30}$$

где w^* *называется рассеянием*, или *диссипацией*. В системе S_N энтропия — функция тех же параметров состояния $(\mu_0, \mu_1, \ldots)$, от которых зависит и u, но с учетом в целом неравновесности состояний m_g рассеяние w^*, вообще говоря, отлично от нуля. Свободная энергия вводится, по определению, формулой (4.18).

Поток тепла определяется как вектор $\mathbf{q}(\boldsymbol{x}, t)$, создающий приток тепла $\dot{Q}_g$ к частице через ее поверхность, точнее, он вместе с $\dot{Q}$ доопределяется одним из скалярных соотношений

$$\dot{Q}_g = -\int_{\Sigma_g} \mathbf{q}\nu\, d\Sigma, \quad \dot{Q}_g \equiv \int_{V_g} \dot{Q}\, dV, \tag{4.31}$$

в котором $\mathbf{q}\nu d\Sigma = \mathbf{q} d\Sigma$ — поток вектора $\mathbf{q}$ через площадку $d\Sigma$ поверхности Σ_g в единицу времени. Иногда учитывают, что приток тепла $\dot{Q}$ в единицу объема частицы может возникать не только через ее поверхность, но и прямо в объем (проникающий приток), чего для простоты здесь не рассматриваем. Из (4.31) формально следует

$$\dot{Q} = -\operatorname{div} \mathbf{q}. \tag{4.32}$$

Вектор $\mathbf{q}$ реализует *теплообмен* между соседними частицами и зависит от их состояния (обычно температуры), но не от скорости движения частиц.

Выпишем теперь *сводку всех дифференциальных соотношений* между введенными пятью скалярными величинами ρ, T, u, s, w^*, двумя векторными $\mathbf{v}$, $\mathbf{q}$ и двумя тензорными σ_{ij}, v_{ij}.

Сохранение массы (4.12):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \tag{I}$$

сохранение импульса (4.21), (4.24):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial x_i}; \quad \mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \mathbf{e}_j; \tag{II}$$

выражение тензора скоростей деформаций через вектор скорости $\mathbf{v}$ (4.28):

$$(v_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right); \tag{III}$$

сохранение энергии (4.29), (4.32), (4.27):

$$\rho \frac{du}{dt} = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} v_{ij} - \operatorname{div} \mathbf{q}; \tag{IV}$$

баланс энтропии (4.30), (4.32):

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + w^*. \tag{V}$$

Почти всегда вектор $\mathbf{q}$ связывают с полем температур *законом Фурье*

$$\mathbf{q} = -\Lambda \operatorname{grad} T, \tag{VI}$$

где Λ — известная матрица коэффициентов теплопроводности.

Система (I)—(VI) незамкнутая, так как содержит три скалярных (I), (IV), (V), два векторных (II), (VI) и одно тензорное (III) дифференциальное уравнение 1-го порядка по $t, \boldsymbol{x}$, иначе — 15 скалярных уравнений относительно 23 функций, что естественно, так как *среда не конкретизирована*.

Для некоторых сред и процессов число введенных скалярных величин уменьшается; в жидкостях часто тензор σ_{ij} сводится к одному давлению $p(\boldsymbol{x}, t)$, для равновесных процессов принимается $w^*=0$, иногда поле температуры $T(\boldsymbol{x}, t)$ считается известным и т. д.

Решением основной термомеханической задачи МСС для области G с границей Σ называются вектор перемещения $\mathbf{u}$ (или скорости $\mathbf{v}$) и температура T, определенные для всех точек среды внутри G и на границе Σ на интервале времени $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Для получения решения необходима замкнутая система уравнений для точек внутри G.

Замыкание приведенной выше системы уравнений в МСС основывается на понятии *макроскопически равновесного*, вообще говоря, *необратимого процесса* с диссипацией и *основном постулате МСС — постулате макроскопической определимости* (§ 11, 12, 19). Задать такой *термомеханический* процесс Π_x в фиксированной точке $\mathbf{x}=\mathrm{const}$ среды — значит задать в этой точке на интервале времени $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ температуру $T(\mathbf{x}, \tau)$ и тензор деформации $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$ в виде функций времени τ; задать некоторые начальные условия для них при $\tau = t_0$. При движении любой сплошной среды в различных ее точках происходят различные процессы, и потому можно определить некоторое множество процессов $M\Pi$, $\Pi_\mathrm{x} \in M\Pi$, например, в виде множества дважды непрерывно дифференцируемых по $(\mathbf{x}, \tau)$ функций $(T(\mathbf{x}, \tau), \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau))$. *Постулат* означает, что для любого $\Pi_\mathrm{x} \in M\Pi$ тензор напряжений и все функции, характеризующие состояние в момент t для среды заданной физической природы, являются определенными функционалами (операторами по $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant t_0$ над функциями $T(\mathbf{x}, \tau)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$). Эти операторы, как и физические константы вещества, не зависят от конкретного вида $\Pi_\mathrm{x} \in M\Pi$. Из постулата следует, что если указанные функционалы найдены из некоторой частной системы опытов с процессами $\Pi^0_\mathrm{x} \in M\Pi$, то они определены и для любого $\Pi_\mathrm{x} \in M\Pi$.

Если известен функционал, связывающий тензор напряжений $\tilde{S} = (S^{ij})$, где S^{ij} — преобразованные к определенной (лагранжевой) системе координат компоненты σ_{ij}, с тензором деформаций $\tilde{\mathscr{E}} = (\varepsilon_{ij})$ и температурой

$$\tilde{S} = \tilde{S}[\tilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x}, \tau), T(\mathbf{x}, \tau)]^t_{\tau=t_0}, \tag{VII}$$

и известно поле температуры

$$T = T(\mathbf{x}, t), \tag{VIII}$$

то *система уравнений* (I), (II), (III), (VII), (VIII) называется *замкнутой* для вектора перемещения $\mathbf{u}$ (4.11) (или скорости $\mathbf{v}$), т. е. является такой системой функциональных уравнений для вну-

тренних точек заданной области G пространства движения среды с границей Σ, для которой *существует решение* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, если всюду в G задан вектор массовой силы $\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$, а на границе Σ и в начальный момент $t=t_0$ заданы некоторые граничные и начальные условия.

Если решение основной задачи известно, то для любых $(\mathbf{x}, t)$ известны и процессы деформации (§ 6), и внутренние напряжения согласно (VII), и все другие физические величины, определяемые заданными операторами по $(\mathbf{x}, t)$ над функциями $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$. Вопрос единственности решения основной задачи рассматривается в каждой задаче отдельно.

В МСС используются два критерия для выбора физически возможного решения: *термодинамический критерий* и *критерий устойчивости*. Критерий устойчивости решения основной задачи базируется на том, что в физических задачах начальные и граничные условия, а также вектор массовой силы нельзя задать абсолютно точно, возможны некоторые небольшие отклонения, называемые возмущениями. Если решение задачи с возмущениями в некотором смысле мало отличается от решения основной задачи, последнее считается устойчивым.

Если в термомеханической задаче поле температуры (VIII) не задано, то система уравнений (I), (II), (III), (VII) незамкнута и должна быть дополнена уравнением, определяющим температуру T. Для этого нужно рассмотреть *термодинамику* частицы постоянной массы $m=\rho\Delta V$. Пользуясь общепринятым неопределенным термином *энергия* и основным постулатом, можно утверждать, что если процесс изменения состояния частицы $\widetilde{\mathcal{E}}(\tau)$, $T(\tau)$, $t_0\leqslant\tau\leqslant t$, задан, то она в момент t за время dt выделяет и передает окружающей среде некоторую термомеханическую энергию $-\rho\Delta V du$, определяемую только природой вещества и процессом; сохраняя понятия мощности внешних сил W_1, количества сообщаемого частице извне тепла $\dot{Q}$ и полной сообщаемой частице термомеханической энергии $(W_1+\dot{Q})\rho\Delta V dt$ такими же, как в макроскопически равновесных обратимых процессах, и пользуясь законом сохранения энергии (в общепринятом смысле), получаем равенство (4.29).

В МСС для термомеханических процессов «закон сохранения энергии» *постулируется* так: существует (для каждого вещества свой) функционал процесса

$$u[\widetilde{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \tau), T(\mathbf{x}, \tau)]_{t_0}^{t} \equiv u[\widetilde{\mathcal{E}}, T]_{t_0}^{t}, \tag{IX}$$

удовлетворяющий уравнению

$$\rho \frac{du}{dt} = W_1 + \dot{Q}, \tag{X}$$

в котором W_1 имеет выражение (4.27), $\dot{Q}=-\operatorname{div}\mathbf{q}$ (4.32) и вектор $\mathbf{q}$ определяется законом Фурье (VI) или другим более точным. Если известны функционалы $\widetilde{S}$ (VII) и u (IX), то система полученных уравнений замкнута. Существенно отметить, что эти функционалы в принципе определяются с помощью *макроскопических опытов*. Если выбирать достаточно малый (представительный для среды) объем ΔV вещества, то можно достигнуть того, что переносные силы инерции при любых его движениях будут малыми сравнительно с поверхностными, и получить в нем однородное состояние; в таком случае $\widetilde{S}$, $\widetilde{\mathcal{E}}$, W_1, T будут функциями только времени t и могут быть измерены на поверхности, $\dot{Q}$ — с помощью достаточно безынерционного калориметра. В опытах можно варьировать один тензор ($\widetilde{\mathcal{E}}$ или $\widetilde{S}$), скаляр $\dot{Q}$ и параметр t и, следовательно, в принципе построить один тензорный функционал (VII) и один скалярный (IX):

$$u[\widetilde{\mathcal{E}},\ T]_{t_0}^{t_1}-u[\widetilde{\mathcal{E}},\ T]_{t_0}^{t_2}=\int_{t_1}^{t_2}\frac{W_1+\dot{Q}}{\rho}\,dt. \tag{XI}$$

Более сложный вопрос функциональной трактовки соотношения (4.30) рассмотрен в § 11.

Понятия и соотношения МСС, как видно из изложенного, являются обобщениями тех, которые получаются в статистической механике в виде средних по всем группам частиц ($N=N_1+N_2+\ldots$ $\ldots+N_\gamma$) или для S_N с частицами одного сорта ($N=N_1$). Очевидно, что возможны (и имеются) некоторые обобщения для систем, состоящих из двух сортов частиц ($N=N_1+N_2$), путем введения двух однотипных систем полевых функций типа ρ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\widetilde{\mathcal{E}}$, $\widetilde{S}$, T с сохранением одной «внутренней энергии» $u[\widetilde{\mathcal{E}}_1,\ \widetilde{\mathcal{E}}_2,\ T_1,\ T_2]_{t_0}^{t}$ и т. п. Но эти вопросы выходят за рамки основ МСС. Другого рода вопросы о влиянии электромагнитного и других полей рассмотрены ниже.

§ 5. Лагранжево и эйлерово представления движения сплошной среды

Пусть $\mathbf{e}_i$ ($i=1,\ 2,\ 3$) представляет неподвижный трехмерный ортогональный нормированный репер (базис) в пространстве наблюдателя:

$$|\mathbf{e}_i|=1,\quad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\delta_{ij}=\left|\begin{array}{ll}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{array}\right. \tag{5.1}$$

Сплошная среда движется и деформируется с течением времени t, занимая область объема V_0 в начальный момент времени $t=t_0$ и V — в момент t. Пусть *

$$\mathbf{x}=\mathrm{x}^i\mathbf{e}_i \tag{5.2}$$

обозначает радиус-вектор (x^i — ортогональные декартовы координаты) какой-нибудь физической точки M в момент $t=t_0$ и

$$\boldsymbol{x}=x^i\mathbf{e}_i \tag{5.3}$$

радиус-вектор (x^i — ортогональные декартовы координаты) той же физической точки M в момент времени t.

Движение сплошной среды считается известным, если для любого t известна связь между $\boldsymbol{x}$ и $\mathbf{x}$, т. е. известна вектор-функция

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\mathbf{x},\ t)\equiv\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\ t), \tag{5.4}$$

т. е. три скалярных соотношения:

$$\begin{aligned}
x^1&=x^1(\mathrm{x}^1,\ \mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}^3,\ t)\equiv\varphi^1(\mathrm{x}^1,\ \mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}^3,\ t),\\
x^2&=x^2(\mathrm{x}^1,\ \mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}^3,\ t)\equiv\varphi^2(\mathrm{x}^1,\ \mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}^3,\ t),\\
x^3&=x^3(\mathrm{x}^1,\ \mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}^3,\ t)\equiv\varphi^3(\mathrm{x}^1,\ \mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}^3,\ t).
\end{aligned} \tag{5.4'}$$

Соотношение (5.4) называется *законом движения* точки $\mathbf{x}$. Функции $x^i(\mathrm{x}^1,\ \mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}^3,\ t)$ считаются непрерывными и дифференцируемыми достаточное число раз по $\mathbf{x}$ и t; соответствие между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\mathbf{x}$ для каждого t считается взаимно-однозначным, т. е. якобиан системы (5.4′) отличен от нуля:

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \mathrm{x}}\right|\neq 0.$$

Следовательно, (5.4) разрешимы относительно $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\boldsymbol{x},\ t)\equiv\boldsymbol{\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x},\ t),\quad
\left|\begin{aligned}
\mathrm{x}^1&=\mathrm{x}^1(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)\equiv\mathfrak{v}^1(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t),\\
\mathrm{x}^2&=\mathrm{x}^2(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)\equiv\mathfrak{v}^2(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t),\\
\mathrm{x}^3&=\mathrm{x}^3(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)\equiv\mathfrak{v}^3(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t).
\end{aligned}\right. \tag{5.5}$$

Точки области, где $\left|\frac{\partial x}{\partial \mathrm{x}}\right|=0$ или $\left|\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x}\right|=0$, называются критическими.

---

* Сумма вида $\sum_{i=1}^{3} a_i b^i$, $\sum_{i,j=1}^{3} A_i^j B_j^i$, ... обозначаются кратко: $a_i b^i$, $A_i^j B_j^i$, ..., т. е. одночлены, имеющие повторяющиеся индексы, означают суммы по ним от 1 до 3. В противном случае отсутствие суммирования при повторяющихся индексах будет оговорено; иногда для этой цели используют в качестве индексов буквы греческого алфавита либо обозначение вида $\langle i=1,\ 2,\ 3\rangle$.

Перемещение $\mathbf{u}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ точки M в момент t равны

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{x} - \mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}, \tag{5.6}$$

причем $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ согласно (5.4) являются функциями $\mathbf{x}$ и t,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{5.7}$$

Однако, пользуясь обратными соотношениями (5.5), $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ можно выразить как функции $\boldsymbol{x}$ и t, например

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}[\mathbf{x}(\boldsymbol{x}, t), t] = \mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t). \tag{5.8}$$

Дифференцируя последнее выражение $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ как сложную функцию, найдем

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{x}}, \tag{5.9}$$

или подробнее

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v^i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v^1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^3}. \tag{5.9'}$$

Начальные координаты $\mathbf{x}$, x^i $(i=1, 2, 3)$ физической точки M зафиксированы, т. е. это определенные числа, которые остаются для этой физической точки постоянными при любом t.

Все другие скалярные (плотность, температура, энергия и т. д.), векторные (поток тепла и т. д.) и тензорные (тензор напряжений и др.) величины, характеризующие состояние тела в окрестности точки M (иногда говорят — состояние частицы M), на основании (5.4) и (5.5) могут быть выражены в виде функций либо $\mathbf{x}$ и t, либо $\boldsymbol{x}$ и t. Этому соответствуют два основных метода изучения движения сплошной среды: метод Лагранжа и метод Эйлера.

Метод Лагранжа. Координаты x^1, x^2, x^3 (вектор $\mathbf{x}$) называются лагранжевыми координатами точек тела. Это, вообще говоря, криволинейные координаты, хотя при $t=t_0$ они выбраны нами как декартовы. Действительно, семейство физических плоскостей $\mathrm{x}^i=\mathrm{const}$ при $t=t_0$, как видно из (5.5) и ясно из физических соображений, преобразуется в некоторое семейство поверхностей. Метод Лагранжа основывается на использовании лагранжевых координат и состоит в изучении движения частиц сплошной среды и всех необходимых параметров в виде функций $\mathbf{x}$ и t. Вместо радиус-вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}$ при этом часто используется вектор перемещения частицы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Скорость и ускорение частицы выражаются по формулам (5.7).

Если какая-нибудь скалярная или векторная функция $\mathcal{F}$ определена для физической частицы, т. е. известна как функция лагранжевых координат $\mathbf{x}$ и времени t, $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$, то скорость ее изменения во времени для этой частицы определяется как

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

Разность же этой величины у двух соседних частиц (частицы $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ и частицы $\mathbf{x}$) в момент t равна

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{x}^i} d\mathrm{x}^i.$$

Ввиду того что в момент t лагранжевы координаты являются криволинейными неортогональными и следящими во времени за физическими частицами, они приводят к довольно сложным выражениям и уравнениям для тензоров напряжений и деформаций, но вместе с тем дают исчерпывающую информацию о поведении связанных с фиксированными частицами параметров. В теории напряжений и малых деформаций среды метод Лагранжа приводит к весьма простым и наглядным результатам.

Метод Эйлера. Рассмотрим движение среды в любой момент времени t относительно фиксированной декартовой ортогональной системы координат и обозначим теперь через $\boldsymbol{x}$ радиус-вектор фиксированной точки этого пространства. В различные моменты времени в точке $\boldsymbol{x}$ находятся различные физические частицы среды — вещество «протекает» в этом пространстве. Вместо того чтобы по методу Лагранжа следить за параметрами движения фиксированной физической частицы, будем следить за тем, с какими параметрами различные физические частицы в разные моменты времени проходят через точку $\boldsymbol{x}$ пространства. Таким образом, можно построить поле интересующих нас параметров в неподвижном пространстве $\boldsymbol{x}$. Это пространство с построенным в нем полем параметров движения, в первую очередь — с полем вектора скорости $\mathbf{v}$ физических частиц, называется эйлеровым. Каждая физическая частица $\mathbf{x}=\mathrm{const}$ со временем «прочерчивает» в нем свою траекторию, причем уравнение этой траектории будет иметь вид (5.4).

Частица, находящаяся в момент t в точке $\boldsymbol{x}$, имеет скорость $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, и потому ее координата в момент $t+dt$ будет $\boldsymbol{x}+\mathbf{v}dt$, так как ее бесконечно малый вектор перемещения за время dt будет $\mathbf{v}dt$. Таким образом, в каждый момент времени t для исследования движения всей среды за малый интервал dt можно принять метод Лагранжа, если $\boldsymbol{x}$ считать начальной координатой частицы (в момент t) а $\mathbf{u}'(\boldsymbol{x}, t)=\mathbf{v}dt$ принять в качестве вектора перемещения этой частицы. Отсюда происходит совпадение теории малых дефор-

маций по методу Лагранжа и теории бесконечно малых деформаций, т. е. скоростей деформаций в эйлеровом пространстве.

Движение среды в эйлеровом пространстве может оказаться стационарным, т. е. поле параметров движения (скорость, плотность и др.) — не зависящим от времени. Таковы случаи установившегося обтекания тел газом, жидкостью, твердой средой. При этом все частицы, проходящие через точку $\boldsymbol{x}$, описывают одну и ту же неизменную траекторию (называемую линией тока), и потому поток вещества образует поле «застывших» в эйлеровом пространстве линий тока.

Оба метода изучения движения сплошной среды являются вполне строгими и адекватными. Если, следуя методу Лагранжа, мы нашли вектор перемещения физических частиц $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, а значит и $\boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)=\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, то поле вектора скорости в эйлеровом пространстве $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ найдем по формулам (5.7), (5.8) и (5.5). Пользуясь обратной функцией вида (5.5), найдем поле и других параметров движения как функции от $\boldsymbol{x}$ и t, т. е. построим их в эйлеровом пространстве.

Если же, напротив, нам известно движение среды в эйлеровом пространстве, в частности известно поле вектора $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, то можно, хотя и не так просто, найти вектор перемещения физической частицы как функцию времени и ее начальной координаты $\mathbf{x}$. Для этого заметим, что в эйлеровом пространстве вдоль неизвестной нам траектории движения какой-нибудь частицы, т. е. на линии

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t), \quad \mathbf{x}=\text{const}.$$

за время dt координата частицы изменяется на величину $d\boldsymbol{x}$, равную бесконечно малому перемещению $\mathbf{v}dt$, и потому

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t). \tag{5.10}$$

Так как вектор $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ предполагается известным, то (5.10) представляет собой одно обыкновенное дифференциальное уравнение относительно вектора $\boldsymbol{x}$, иначе говоря, три скалярных уравнения

$$\frac{dx^i}{dt}=v^i(x^1, x^2, x^3, t) \quad (i=1, 2, 3). \tag{5.10'}$$

Эти уравнения имеют три интеграла, зависящих от трех произвольных постоянных:

$$x^i=f^i(C^1, C^2, C^3, t) \quad (i=1, 2, 3).$$

Удовлетворяя начальным условиям

$$t=t_0, \quad x^i=\mathrm{x}^i, \tag{5.11}$$

найдем выражения постоянных C^i через x^1, x^2, x^3, т. е. придем к решению в виде (5.4). А это значит, что мы найдем движение среды в лагранжевых координатах. Возникающие при этом трудности связаны с интегрированием системы (5.10).

Если в эйлеровом пространстве дано поле вектора скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, то в каждый момент времени t можно построить *линии тока.* Линия тока в момент t есть «траектория вектора скорости» $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, проходящая через какую-нибудь точку $\boldsymbol{x}_0$. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\lambda)$ — уравнение линии тока в параметрическом виде (λ — параметр). По определению вектор $d\boldsymbol{x} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\lambda} d\lambda$ на линии тока колинеарен вектору $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, т. е. уравнение линии тока имеет вид

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3}, \tag{5.12}$$

причем $v^i = v^i\ (x^1, x^2, x^3, t)$, где t постоянно. Сравнивая (5.10) и (5.12), видим, что линии тока совпадают с траекториями частиц только в том случае, если движение является установившимся (т. е. вектор скорости $\mathbf{v}$ в эйлеровом пространстве не зависит от t) *.

Если определено поле скалярной или векторной величины $\mathcal{F}$ в эйлеровом пространстве, т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{x}, t)$, то частная производная $\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, t)/\partial t$ даст скорость изменения $\mathcal{F}$ в фиксированной геометрической точке пространства $\boldsymbol{x}$. Скорость же изменения $\mathcal{F}$ для физической частицы, в момент t находящейся в точке $\boldsymbol{x}$, определяется, подобно (5.9), *субстанциональной* (индивидуальной, полной) производной по времени

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt},$$

где $d\boldsymbol{x}/dt$ определяется из (5.10), т. е.

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{F}(x, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} + v^i \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x^i}. \tag{5.13}$$

В случае установившегося движения имеем

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{d\mathcal{F}}{dt} = v^i \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x^i}.$$

Второе слагаемое в (5.13) называют *конвективной* производной.

Ближайшей нашей задачей является изучение кинематики бесконечно малой частицы сплошной среды. Такую частицу можно выбрать при $t = t_0$ в окрестности физической точки с координат-

* Точнее, если $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(t)\mathbf{V}(\boldsymbol{x})$.

ным вектором $\mathbf{x}=\mathrm{const}$. Ее можно взять, например, в виде прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$$\mathrm{x}^i = C^i, \quad \mathrm{x}^i = C^i + dC^i \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{5.14}$$

где C^i, dC^i — некоторые константы. В результате движения всех точек среды по закону (5.4) ортогональные физические плоскости (5.14) превратятся в три семейства поверхностей, вообще говоря, не ортогональных. Но, по условию существования производных от $\boldsymbol{x}$ по $\mathbf{x}$ в окрестности точки $\mathbf{x}=\mathrm{const}$ с точностью до $(dC^i)^2$, эти поверхности можно заменить касательными к ним плоскостями. Следовательно, наша частица в момент t станет с точностью до малых высшего порядка косоугольным параллелепипедом. Преобразование параллелепипеда из прямоугольного в косоугольный требует задания девяти параметров: шести, связанных с чистой деформацией (три удлинения ребер и три изменения углов между ними), и трех, связанных с поворотом его как абсолютно твердого тела. Формы частицы при $t=t_0$ и $t>t_0$ могут очень сильно отличаться, и метод Лагранжа основан на изучении всей эволюции преобразования формы частиц. Поэтому основными кинематическими объектами в методе Лагранжа являются так называемые тензор конечной деформации и тензор относительного перемещения (дисторсии) окрестности любой физической точки на конечном интервале времени $t-t_0$.

В методе Эйлера рассматривается бесконечно малое изменение во времени формы той (заранее неизвестной) частицы, которая в момент t занимает фиксированный в пространстве $\boldsymbol{x}$ объем, например параллелепипед, ограниченный плоскостями

$$x^i = \mathrm{const}, \quad x^i + dx^i = \mathrm{const}. \tag{5.15}$$

За время dt он также становится косоугольным, но искажения являются бесконечно малыми, и потому они сравнительно просто выражаются через вектор скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$; основными кинематическими объектами становятся так называемые тензоры скорости деформации и скорости относительного перемещения. Отсюда понятно, что все кинематические соотношения метода Эйлера формально получаются из соответствующих соотношений метода Лагранжа, если интервал времени $t-t_0$ стремить к нулю и t_0 считать произвольным.

С учетом того, что физические свойства среды в термодинамике и в опытах определяются для фиксированной массы, теория уравнений состояния среды ниже изложена в лагранжевых координатах; необходимые соотношения для использования часто более удобного метода Эйлера будут получены.

§ 6. Деформация окрестности точки сплошной среды

Деформацию сплошной среды будем считать известной (по определению), если для любой фиксированной ее точки с начальной координатой $\mathbf{x}=\mathrm{const}$ (называемой физической, или материальной, точкой) в любой момент времени $t \geqslant t_0$ известна деформация всех бесконечно малых физических элементов, взятых в окрестности этой точки. Такими элементами могут быть бесконечно малые отрезки линий (волокна), площадки поверхностей, объемы с различными формами ограничивающих поверхностей, состоящие из одних и тех же материальных точек при любом t. Из геометрических соображений ясно, что деформация окрестности точки $\mathbf{x}$ будет вполне определена, если известна деформация любого бесконечно малого вектора — волокна $d\mathbf{x}=\xi$, взятого в точке $\mathbf{x}$.

В некоторой неподвижной точке 0 евклидова пространства наблюдателя нами выбран неподвижный ортонормированный репер $\mathbf{e}_i$ ($i=1, 2, 3$), в котором при $t=t_0$ радиус-вектор $\mathbf{x}=\mathrm{x}^i\mathbf{e}_i$ с его декартовыми координатами $\mathrm{x}^i=\mathrm{const}$ регистрирует физическую точку. Радиус-вектор $\boldsymbol{x}=x^i\mathbf{e}_i=\mathrm{const}$ с декартовыми координатами x^i определяет неподвижную точку пространства наблюдателя (эйлерова пространства), через которую с течением времени t проходят различные физические точки. Квадрат длины фиксированного *физического волокна* $d\mathbf{x}=\xi$ при $t=t_0$ равен

$$(d\mathbf{x})^2=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j=\overset{\circ}{g}_{ij}d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j=\overset{\circ}{g}_{ij}\xi^i\xi^j=\sum_{1}^{3}(d\mathrm{x}^i)^2 \tag{6.1}$$

и, следовательно, *начальный метрический тензор* $\overset{\circ}{g}_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ лагранжевой системы координат x^i равен тензору δ_{ij} Кронекера

$$\overset{\circ}{g}_{ij}=\delta_{ij}. \tag{6.2}$$

Квадрат длины любого малого элемента $d\boldsymbol{x}$ пространства наблюдателя имеет такое же выражение:

$$(d\boldsymbol{x})^2=\overset{\circ}{g}_{ij}dx^i dx^j=\sum_{1}^{3}(dx^i)^2. \tag{6.3}$$

Но для каждого t можно найти среди точек $\boldsymbol{x}$ и векторов-отрезков $d\boldsymbol{x}$ в них такие, что в точке $\boldsymbol{x}$ будет находиться интересующая нас фиксированная физическая точка $\mathbf{x}$, а $d\boldsymbol{x}=\rho$ будет представлять деформированный в момент t вектор-отрезок $\xi=d\mathbf{x}$. Для этого необходимо использовать соответствие между текущими и начальными координатами одних и тех же физических точек, которое устанавливает закон движения сплошной среды (5.4) для различных моментов времени t.

Формально закон движения среды в евклидовом пространстве (5.4), (5.5) представляет взаимно-однозначное непрерывно дифференцируемое преобразование множества точек, заключенного в объеме V_0 и ограниченного поверхностью Σ_0 (V_0 — начальный объем, Σ_0 — граница среды) во множество точек $\boldsymbol{x}$, заключенное в объеме V с границей Σ; время t является параметром преобразования. При этом окрестность каждой точки $\mathbf{x}$ аффинно преобразуется в окрестность соответствующей точки $\boldsymbol{x}$. Теория деформаций, следовательно, опирается на дифференциальную геометрию, соответствующую преобразованиям координат (5.4), (5.5) *.

Согласно закону движения физическая точка $\mathbf{x}$ в момент t находится в точке пространства $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$, соседняя физическая точка $\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}$, $d\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}$, находится в точке $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)$, и потому вектор-волокно $d\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}$ преобразуется в *вектор-волокно* $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$,

$$d\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{x}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)-\boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\mathrm{x}^i}\xi^i=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\mathrm{x}^i}d\mathrm{x}^i\equiv\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}, \quad (6.4)$$

причем бесконечно малые высшего порядка $O(\xi^2)$ отброшены. Как видим, в выражение (6.4) входят три вектора

$$\boldsymbol{э}_i=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\mathrm{x}^i}\quad(i=1,\ 2,\ 3) \quad (6.5)$$

и оператор $\partial\boldsymbol{x}/\partial\mathbf{x}$, называемый аффинором.

В точке $\boldsymbol{x}$ в момент t можно построить репер $\mathbf{e}_i$ (путем параллельного переноса из начала O системы координат) и в нем изобразить векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\rho}$

$$\boldsymbol{\xi}=\xi^i\mathbf{e}_i,\quad \boldsymbol{\rho}=\rho^i\mathbf{e}_i. \quad (6.6)$$

Тогда преобразование (6.4) волокна $\boldsymbol{\xi}$ в волокно $\boldsymbol{\rho}$ через их декартовы координаты ξ^i, ρ^i представится линейными соотношениями

$$\rho^i=A^i_j\xi^j,\quad A^i_j=\frac{\partial x^i}{\partial\mathrm{x}^j}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3). \quad (6.7)$$

Поскольку $\boldsymbol{\xi}$ — любое волокно в точке $\mathbf{x}$, причем A^i_j не зависит от $\boldsymbol{\xi}$, то (6.7) представляет аффинное преобразование окрестности точки $\mathbf{x}$ в ее окрестность в момент времени t. Обратное по отношению к (6.7) преобразование можно получить либо разрешая систему (6.7) относительно ξ^i, т. е. умножая $\rho^i=A^i_j\xi^j$ на обратную $\|A^i_j\|$ матрицу $\|B^k_i\|$, т. е. матрицу, определяемую равенствами

$${}^i_jA^k_i={}^k_iA^i_j=\delta^k_j\equiv\delta_{kj}\quad(k,\ j=1,\ 2,\ 3), \quad (6.8)$$

---

* Далее всюду производные $\dfrac{\partial x^i}{\partial\mathrm{x}^j}, \dfrac{\partial\mathrm{x}^m}{\partial x^n}, \ldots$ берутся на основании (5.4), (5.5).

либо непосредственно из закона движения в форме (5.5). По определению

$$\xi = \mathbf{x}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\rho},\ t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{x},\ t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\rho} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}\rho^i \qquad (6.9)$$

откуда следует

$$\xi^i = B^i_j \rho^j, \quad B^i_j = \frac{\partial \mathrm{x}^i}{\partial x^j} \quad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3). \qquad (6.10)$$

Справедливость (6.8) легко проверяется на основании (6.7), (6.10):

$$B^k_i A^i_j = \frac{\partial \mathrm{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \mathrm{x}^j} = \frac{\partial \mathrm{x}^k}{\partial \mathrm{x}^j} = \delta^k_j.$$

Как видим, аффиноры $\widetilde{A} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathbf{x}}$ и обратный ему $\widetilde{B} = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{x}}$ определяются соответственно тройкой векторов $\boldsymbol{э}_i = \partial \boldsymbol{x}/\partial \mathrm{x}^i$ (6.5) и тройкой векторов $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{x}/\partial x^i$, т. е. матрицами

$$\| A^i_j \| = \left\| \begin{matrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{matrix} \right\|, \quad \| B^i_j \| = \left\| \begin{matrix} {}^1_1 & {}^1_2 & B^1_3 \\ B^2_1 & {}^2_2 & {}^2_3 \\ B^3_1 & {}^3_2 & B^3_3 \end{matrix} \right\|. \qquad (6.11)$$

Произведение определителей $A = |A^i_j|$ и $\ = |B^k_i|$ этих матриц равно единице на основании (6.8):

$$A \quad = |A^i_j| \quad B^k_l| = |A^i_j \quad {}^k_i| = 1. \qquad (6.12)$$

Прямое и обратное аффинные преобразования

$$\boldsymbol{\rho} = \widetilde{A}\xi, \quad \xi = \widetilde{\ }\boldsymbol{\rho}, \qquad (6.13)$$

рассматриваемые в фиксированный момент t, представляют соответственно аффинное преобразование окрестности физической точки $\mathbf{x}$ и аффинное преобразование окрестности геометрической точки $\boldsymbol{x}$.

Отсюда следуют все свойства аффинных преобразований, в частности:

1. Частицы, при $t = t_0$ лежащие на прямой, остаются на прямой и после деформации. Например, прямолинейное волокно $(\xi)_1 = \xi^1 \mathbf{e}_1$, параллельное оси x_1, перейдет в прямолинейное волокно

$$(\boldsymbol{\rho})_1 = \widetilde{A}\xi^1\mathbf{e}_1 = \xi^1\widetilde{A}\mathbf{e}_1 = \xi^1(A^1_1\mathbf{e}_1 + A^2_1\mathbf{e}_2 + A^3_1\mathbf{e}_3) = \xi^1\boldsymbol{э}_1,$$

так как $A^i_1\ \mathbf{e}_i = \boldsymbol{э}_1$ постоянный (при данном t не зависящий от ξ) вектор.

2. Плоскость переходит в плоскость. Например, плоскость $\xi^1=\mathrm{const}=C_1$ переходит в плоскость, согласно (6.10) имеющую уравнение

$$B_i^1 \rho^i = C_1,$$

а параллельная $\xi^1=C_1$ плоскость $\xi^1 = C_1'$ — в плоскость $B_i^1 \rho^i = C_1'$, параллельную указанной.

3. Так как параллельность линий и плоскостей сохраняется, то прямоугольные параллелепипеды переходят в косоугольные параллелепипеды.

4. Множество частиц, расположенных при $t=t_0$ на сфере $\xi^2=C^2$, переходит во множество тех же частиц, расположенных на поверхности эллипсоида, определяемого уравнением

$$\sum_{\alpha=1}^{3} B_i^\alpha B_j^\alpha \rho^i \rho^j = C^2.$$

Обратное преобразование $\boldsymbol{\xi}=\widetilde{B}\boldsymbol{\rho}$ отвечает на вопрос, каковы начальные физические элементы среды (при $t=t_0$), соответствующие элементам, произвольно выбранным в момент t в точке $\boldsymbol{x}$ пространства наблюдателя. Так, векторы

$$(\boldsymbol{\rho})_1 = \boldsymbol{э}_1 dx^1, \quad (\boldsymbol{\rho})_2 = \boldsymbol{э}_2 dx^2, \quad (\boldsymbol{\rho})_3 = \boldsymbol{э}_3 dx^3$$

в точке $\boldsymbol{x}$ в момент t представляют соответственно те волокна, которые в точке $\mathbf{x}$ при $t=t_0$ были координатными, т. е.

$$(\boldsymbol{\xi})_1 = \mathbf{e}_1 dx^1, \quad (\boldsymbol{\xi})_2 = \mathbf{e}_2 dx^2, \quad (\boldsymbol{\xi})_3 = \mathbf{e}_3 dx^3.$$

Действительно, если, например, вектор-волокно $(\boldsymbol{\xi})_1=\xi^1\mathbf{e}_1$ имеет координаты $\xi^1>=0$, $\xi^2=\xi^3=0$, то соответствующее ему по закону (6.4) будет

$$(\boldsymbol{\rho})_1 = \boldsymbol{э}_1 \xi^1 = (A_1^1 \mathbf{e}_1 + A_1^2 \mathbf{e}_2 + A_1^3 \mathbf{e}_3)\, \xi^1,$$

причем длина его $|(\boldsymbol{\rho})_1| = \xi^1 \sqrt{\boldsymbol{э}_1\boldsymbol{э}_1} = \xi^1 |\boldsymbol{э}_1|$, т. е. скаляр $g_{11}=\boldsymbol{э}_1\boldsymbol{э}_1$ является коэффициентом изменения длины ξ^1 (метрическим коэффициентом).

Квадрат длины любого волокна, которое при $t=t_0$ определяется вектором $\boldsymbol{\xi}$, согласно (6.4), (6.5) равен

$$(d\boldsymbol{x})^2 \equiv \boldsymbol{\rho}^2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^i} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^j} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} \xi^i \xi^j. \qquad (6.14)$$

Скалярные произведения векторов $\boldsymbol{э}_i\boldsymbol{э}_j$ $(i, j=1, 2, 3)$

$$g_{ji} = g_{ij} = \boldsymbol{э}_i \boldsymbol{э}_j = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^i} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^j} = A_i^m A_j^m, \; m = 1, 2, 3, \qquad (6.15)$$

образуют так называемый ковариантный метрический тензор, так как он в момент t определяет изменение длины любого волокна $\boldsymbol{\xi}$, взятого при $t=t_0$ в точке $\mathbf{x}$; этот тензор симметричен. В силу начальных условий, которым удовлетворяет закон движения:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t), \quad t = t_0, \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{x},$$

$$x^i = x^i(\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3, t), \quad t = t_0, \quad x^i = \mathrm{x}^i, \tag{6.16}$$

метрический тензор g_{ij} при $t=t_0$ равен

$$(g_{ij})_{t=t_0} = \overset{0}{g}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathrm{x}^i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathrm{x}^j} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \tag{6.16'}$$

Заметим, что совокупность величин g_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ действительно представляет тензор второго ранга $\tilde{g}$ (по обратному признаку* тензора), так как в соотношении (6.14) слева — скаляр, справа же — квадратичная форма по ξ^i, причем $\boldsymbol{\xi}$ — вектор.

Разность $\boldsymbol{\rho}^2 - \boldsymbol{\xi}^2$ однозначно определяет изменение длины волокна $\boldsymbol{\xi}$ в момент t, причем согласно (6.1), (6.14) она равна

$$\boldsymbol{\rho}^2 - \boldsymbol{\xi}^2 = (g_{ij} - \overset{0}{g}_{ij})\, \xi^i \xi^j = (g_{ij} - \delta_{ij})\, \xi^i \xi^j, \tag{6.17}$$

и, следовательно, совокупность девяти величин

$$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{6.18}$$

на основании обратного признака представляет тензор $\tilde{\mathcal{E}}$, называемый *тензором деформации*. Он симметричен и равен нулю (т. е. все это компоненты равны нулю) при $t=t_0$.

Обратим внимание на то, что квадратичные формы (6.1), (6.14) и вытекающая из (6.17) форма

$$\boldsymbol{\rho}^2 - \boldsymbol{\xi}^2 = 2\varepsilon_{ij}\, \xi^i \xi^j = 2\varepsilon_{ij}\, d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j \tag{6.19}$$

записаны в лагранжевых координатах и потому компоненты метрических тензоров $\overset{0}{g}_{ij}$, g_{ij} и тензора деформации ε_{ij} представляют тензоры $\tilde{g}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ в этих же координатах.

В точке $\boldsymbol{x}$ в момент t векторы $\mathbf{э}_i$ $(i=1, 2, 3)$ образуют косоугольный базис, или репер, в который преобразуется репер $\mathbf{e}_i$. Если с базисом $\mathbf{э}_i$ связать декартову систему координат, то она будет косоугольной. Три вектора $\mathbf{э}_i = \partial \boldsymbol{x}/\partial \mathrm{x}^i$ в точке $\boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$ будем называть *местным ковариантным* (индекс i — внизу) *базисом.*

Для определения деформаций физических объемов и площадок удобными являются векторы *контравариантного базиса* $\mathbf{э}^i$ и

* Коэффициенты инвариантной квадратичной формы по компонентам вектора образуют симметричный тензор второго ранга.

компоненты метрического тензора g^{ij}, однозначно связанные с $\mathbf{э}_i$ и g_{ij} соотношениями

$$\mathbf{э}^i g_{ij} = \mathbf{э}_j; \quad g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \ (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{6.20}$$

Следовательно, $\mathbf{э}^i$, g^{ij} находятся по известным формулам через основной определитель

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = э_{ijk} g_{1i} g_{2j} g_{3k}, \tag{6.21'}$$

где $э_{ijk}$ равен единице для четной подстановки (1, 2, 3), минус единице для нечетной и нулю для двух или трех равных индексов; обратный определитель $g^{-1} = |g^{ij}|$ находится из условия

$$g \cdot g^{-1} \equiv |g_{ij}|\,|g^{kl}| = |g_{ij} g^{jk}| = |\delta^k_i| = 1$$

и равен $1/g$; вектор $\mathbf{э}^\alpha$ равен

$$\mathbf{э}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} [\mathbf{э}_\beta, \mathbf{э}_\gamma], \tag{6.21''}$$

где числа (α, β, γ) образуют четную (круговую) подстановку индексов (1, 2, 3); компоненты g^{ij} имеют выражения

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial \ln g}{\partial g_{ij}}. \tag{6.22}$$

Отметим еще вытекающие также из (6.20) формулы

$$\mathbf{э}^\alpha \mathbf{э}_\beta = \delta^\alpha_\beta, \quad \mathbf{э}^\alpha = \mathbf{э}_i g^{\alpha i}, \quad g^{ij} = \mathbf{э}^i \mathbf{э}^j, \quad g^{ij} = g^{ji} = \beta^i_m \beta^j_m. \tag{6.23}$$

Начальная координатная физическая площадка прямоугольника, образованного координатными волокнами $(\xi)_\alpha = \xi^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ и $(\xi)_\beta = \xi^\beta \mathbf{e}_\beta$, представляется вектором

$$d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\gamma = [(\xi)_\alpha, (\xi)_\beta] = d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\gamma [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\gamma \mathbf{e}_\gamma, \ d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\gamma = \xi^\alpha \xi^\beta = dx^\alpha dx^\beta. \tag{6.24}$$

К моменту t площадка $d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\gamma$ преобразуется в площадку $d\Sigma^\gamma$ параллелограмма, образованного векторами $(\rho)_\alpha = \xi^\alpha \mathbf{э}_\alpha$, $(\rho)_\beta = \xi^\beta \mathbf{э}_\beta$, представляемую вектором

$$d\,\mathbf{\Sigma}^\gamma = [(\rho)_\alpha, (\rho)_\beta] = d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\gamma [\mathbf{э}_\alpha, \mathbf{э}_\beta]$$

или на основании (6.21″) — вектором

$$d\,\mathbf{\Sigma}^\gamma = \sqrt{g}\, d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\gamma \mathbf{э}^\gamma = d\Sigma^\gamma (\boldsymbol{\nu})_\gamma, \tag{6.25}$$

где вектор единичной нормали к этой площадке $(\mathbf{v})_\gamma$ равен

$$(\mathbf{v})_\gamma = \frac{\mathfrak{э}^\gamma}{|\mathfrak{э}^\gamma|} = \frac{1}{\sqrt{g^{\gamma\gamma}}}\mathfrak{э}^\gamma. \tag{6.26}$$

Следовательно, величина площадки $d\mathring{\Sigma}^\gamma$ в результате деформации станет равной

$$d\Sigma^\gamma = \sqrt{gg^{\gamma\gamma}}\, d\,\mathring{\Sigma}^\gamma, \ \langle\gamma = 1, 2, 3\rangle. \tag{6.27}$$

Зная закон изменения координатных площадок (6.25), (6.27), найдем его и для произвольной наклонной (косой) площадки $d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^{\mathrm{v}}$, проведенной при $t=t_0$ в точке $\mathbf{x}$ и имеющей единичную нормаль $\mathring{\mathbf{v}}$. Для этого рассмотрим координатный тетраэдр, построенный на векторах $(\xi)_1$, $(\xi)_2$, $(\xi)_3$ так, что площади его треугольных координатных граней представляются векторами

$$\frac{1}{2}d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^1, \quad \frac{1}{2}d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^2, \quad \frac{1}{2}d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^3,$$

а наклонной грани — вектором

$$\frac{1}{2}d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}d\,\mathring{\Sigma}\,\mathring{\mathbf{v}}. \tag{6.28}$$

Поскольку поверхность фигуры замкнута, то суммарная вектор-площадь поверхности равна нулю

$$d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^{\mathrm{v}} + \sum_{\alpha=1}^{3} d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^\alpha = 0,$$

если все вектор-нормали этих площадок внешние (или все внутренние). Но для площадок $d\,\mathring{\Sigma}^\alpha$ нормали отрицательны ($-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_3$), и потому на основании (6.28), (6.24) получаем

$$d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^{\mathrm{v}} \equiv d\,\mathring{\Sigma}^{\mathrm{v}}\,\mathring{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^{3} d\,\mathring{\Sigma}^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha. \tag{6.29}$$

Отсюда, умножая на $\mathbf{e}_\beta$, находим связь между размерами начальных площадок:

$$d\,\mathring{\Sigma}^\beta = d\,\mathring{\Sigma}^{\mathrm{v}}\,\mathring{\mathrm{v}}_\beta, \quad \mathring{\mathrm{v}}_\beta = \mathring{\mathbf{v}}\,\mathbf{e}_\beta \ (\beta = 1, 2, 3). \tag{6.30}$$

В результате деформации векторы $(\xi)_i$ превратятся в $(\rho)_i$, площадки $d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^\alpha$ — в $d\,\mathbf{\Sigma}^\alpha$, площадка $d\,\mathring{\mathbf{\Sigma}}^{\mathrm{v}}$ — в

$$d\,\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{v}} = d\,\Sigma^{\mathrm{v}}\,\mathbf{v}, \tag{6.31}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичная нормаль; тетраэдр преобразуется в косоугольный тетраэдр, для которого из соображений замкнутости его поверхности на основании (6.25), (6.29) получим

$$d\Sigma^{\nu} = d\Sigma^{\nu}\boldsymbol{\nu} = \sqrt{g}\sum_{\alpha=1}^{3} d\mathring{\Sigma}^{\alpha}\boldsymbol{\vartheta}^{\alpha}. \tag{6.32}$$

Это векторное уравнение определяет и единичную нормаль $\boldsymbol{\nu}$, и размер косой площадки $d\Sigma^{\nu}$, в которую преобразуется площадка $d\mathring{\Sigma}^{\nu}$. Умножая (6.32) на $\boldsymbol{\vartheta}_{\beta}$ и используя (6.23) и (6.27), найдем выражение величины деформированной площадки $d\Sigma^{\beta}$ через $d\Sigma^{\nu}$:

$$d\Sigma^{\beta} \equiv \sqrt{gg^{\beta\beta}}\,d\mathring{\Sigma}^{\beta} = \sqrt{g^{\beta\beta}}\,d\Sigma^{\nu}\cdot\nu_{\beta},$$
$$\nu_{\beta} = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\vartheta}_{\beta}, \quad \boldsymbol{\nu} = \nu_i\boldsymbol{\vartheta}^i = \nu^i\boldsymbol{\vartheta}_i. \tag{6.33}$$

Здесь ν_{β} — ковариантная компонента вектора единичной нормали $\boldsymbol{\nu}$.

Поскольку изменения в результате деформации любых физических вектор-волокон и вектор-площадок найдены и выражены через метрический тензор $\tilde{g}$ и, следовательно, через тензор деформации $\tilde{\mathcal{E}}$, нам остается найти изменения малых объемов и дать наглядную трактовку компонент тензоров $\tilde{g}$, $\tilde{\mathcal{E}}$. Эти тензоры представляются матрицами $\|g_{ij}\|$, $\|\varepsilon_{ij}\|$, причем им соответствуют симметричные квадратичные формы (6.14), (6.19), а значит, и центральные поверхности второго порядка

$$2\Phi_g = g_{ij}X^iX^j = \text{const}, \quad 2\Phi_{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}X^iX^j = \text{const}, \tag{6.34}$$

где $\mathbf{X}(X^i)$ — вектор произвольного масштаба, отложенный вдоль волокна ξ в точке $\mathbf{x}$. Поскольку $g_{\alpha\alpha} = (\boldsymbol{\vartheta}_{\alpha})^2$, то поверхность $2\Phi_g = \text{const}$ — эллипсоид; поверхность $2\Phi_{\varepsilon} = \text{const}$ — центральная поверхность, и, значит, это эллипсоид или однополостный и двухполостный гиперболоид. Главные оси этих поверхностей совпадают, главные значения тензоров $\tilde{g}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ отличаются на константу. Действительно, главное направление определяется вектором $\mathbf{X}$, колинеарным градиенту к поверхности. Для $2\Phi_g = \text{const}$ имеем

$$\operatorname{grad}\Phi_g \equiv \frac{\partial\Phi_g}{\partial X^i}\mathbf{e}_i \equiv g_{ij}X^j\mathbf{e}_i = g_{\text{x}}\mathbf{X} = g_{\text{x}}\delta_{ij}X^j\mathbf{e}_i,$$

откуда для компонент вектора $\mathbf{X}$ и коэффициента g_{x} получаем однородную систему уравнений

$$(g_{ij} - g_{\text{x}}\delta_{ij})X^j = 0 \ (i = 1, 2, 3). \tag{6.35}$$

Для поверхности $2\Phi_\varepsilon = \mathrm{const}$ аналогично получаем

$$\operatorname{grad}\Phi_\varepsilon = \varepsilon_{ij} X^j \mathbf{e}_i = \varepsilon_x \mathbf{X} = \varepsilon_x \delta_{ij} X^j \mathbf{e}_i,$$
$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_x \delta_{ij}) X^j = 0,$$

или на основании (6.18)

$$(g_{ij} - (2\varepsilon_x + 1)\delta_{ij}) X^j = 0. \tag{6.36}$$

Определители систем (6.35), (6.36) равны нулю:

$$|g_{ij} - g_x \delta_{ij}| = 0, \quad |g_{ij} - (2\varepsilon_x + 1)\delta_{ij}| = 0, \tag{6.37}$$

откуда находятся одинаковые значения параметров

$$g_x = 2\varepsilon_x + 1. \tag{6.38}$$

Значит, уравнения (6.35), (6.36) совпадают и определяют одни и те же главные векторы $\mathbf{X}$. Развертывая определитель $|g_{ij} - g_x\delta_{ij}|$ по степеням g_x, из (6.37) получим *вековое уравнение*:

$$-g_x^3 + I_{g1} g_x^2 - I_{g2} g_x + I_{g3} = 0. \tag{6.39}$$

Оно имеет три действительных корня g_1, g_2, g_3, причем инварианты преобразования системы координат (x_i)

$$I_{g1} = g_{ij}\delta^{ij} = g_{11} + g_{22} + g_{33} = g_1 + g_2 + g_3,$$
$$I_{g2} = \frac{1}{2}(I_{g1}^2 - g_{im}g_{jn}\delta^{im}\delta^{jn}) =$$
$$= \frac{1}{2}(I_{g1}^2 - g_{ij}g_{ij}) = g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_3 g_1, \tag{6.40}$$
$$I_{g3} = |g_{ij}| = g_1 g_2 g_3 = g.$$

Три главных вектора $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$ с единичными векторами $\mathbf{e}_{i0}$ $(i = 1, 2, 3)$, определяемыми тремя системами уравнений (6.35) при $g_x = g_1$, $g_x = g_2$, $g_x = g_3$, взаимно ортогональны, и потому путем преобразования поворота системы координат квадратичные формы (6.14), (6.19) можно преобразовать к главным осям тензоров $\tilde{g}$, $\tilde{\mathcal{E}}$. Обозначая через ξ_{i0} $(i = 1, 2, 3)$ координаты волокна $\boldsymbol{\xi}(\xi^i)$ в главном ортонормированном репере $\mathbf{e}_{i0}$, получим канонические представления форм (6.14), (6.19):

$$\rho^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j = \sum_{i=1}^{3} g_i \xi_{i0}^2,$$
$$\rho^2 - \xi^2 = 2\varepsilon_{ij}\xi^i\xi^j = 2\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \xi_{i0}^2. \tag{6.41}$$

Величины g_i, ε_i, связанные соотношениями (6.38):

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}(g_i - 1), \ (i = 1, 2, 3), \tag{6.42}$$

называются *главными компонентами* тензоров $\tilde{g}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$, и они для точки $\mathbf{x}$=const в момент t=const не зависят от выбора системы координат, т. е. инвариантны относительно преобразований базиса $\mathbf{e}_i$. Из (6.39), (6.40) следует, что I_{g1}, I_{g2}, I_{g3} и соответственно

$$I_{\varepsilon 1} = \varepsilon_{ij}\delta^{ij} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$I_{\varepsilon 2} = \frac{1}{2}(I_{\varepsilon 1}^2 - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1, \tag{6.43}$$

$$I_{\varepsilon 3} = |\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

также являются инвариантами таких преобразований базиса $\mathbf{e}_i$. В любой фиксированный момент t в точке $\mathbf{x}$=const во всех системах координат инварианты имеют одинаковые числовые значения.

Объем начального прямоугольного координатного параллелепипеда, построенного на векторах $(\xi)_1$, $(\xi)_2$, $(\xi)_3$, равен

$$dV_0 = (\xi)_\alpha[(\xi)_\beta, (\xi)_\gamma] = \xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma\mathbf{e}_\alpha[\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma] = \xi^1\xi^2\xi^3 = dx^1\,dx^2\,dx^3. \tag{6.44}$$

Объем этого же параллелепипеда, после деформации (т. е. в момент t) ставшего косоугольным, образуется векторами $(\boldsymbol{\rho})_\alpha = \boldsymbol{\mathit{Э}}_\alpha\xi^\alpha$ и, следовательно, равен

$$dV = (\boldsymbol{\rho})_\alpha[(\boldsymbol{\rho})_\beta(\boldsymbol{\rho})_\gamma] = dV_0\,\boldsymbol{\mathit{Э}}_\alpha[\boldsymbol{\mathit{Э}}_\beta\,\boldsymbol{\mathit{Э}}_\gamma],$$

или, на основании (6.21), (6.23)

$$dV = dV_0\sqrt{g}. \tag{6.45}$$

По свойству аффинного преобразования это равенство верно не только для деформации координатного параллелепипеда, но и для любого малого объема, состоящего на всем интервале времени t—t_0 из одних и тех же физических частиц.

Масса частиц в объеме, изменяющемся со временем по закону (6.45), при фиксированных лагранжевых координатах $\mathbf{x}$ остается неизменной, и потому *закон сохранения массы*

$$dm = \rho\,dV = \rho_0\,dV_0, \tag{6.46}$$

где ρ_0, ρ — *плотности* частицы $\mathbf{x}$ в моменты t_0 и t, в лагранжевых координатах принимает вид

$$\rho\sqrt{g} = \rho_0. \tag{6.47}$$

Физический смысл компонент тензора деформации $\tilde{\mathcal{E}}$ выясняется из соотношений (6.7), (6.13) и (6.19). *Относительным удлинением* любого начального волокна называется величина

$$e_{\xi} = \frac{|\rho| - |\xi|}{|\xi|} = \sqrt{\frac{\rho^2}{\xi^2}} - 1. \qquad (6.48)$$

Обозначим направляющие косинусы вектор-волокна ξ через

$$\overset{\circ}{l}{}^i = \frac{\xi^i}{|\xi|} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (6.49)$$

и перепишем (6.19) в виде

$$\frac{\rho^2}{\xi^2} = 1 + 2\varepsilon_{ij}\overset{\circ}{l}{}^i\overset{\circ}{l}{}^j = g_{ij}\overset{\circ}{l}{}^i\overset{\circ}{l}{}^j, \qquad (6.50)$$

учитывая, что

$$\overset{\circ}{l}{}^i\overset{\circ}{l}{}^j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \overset{\circ}{l}{}^{i^2} = 1. \qquad (6.51)$$

Пусть волокно ξ совпадает с координатным $(\xi)_\alpha = \xi^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, так что $\overset{\circ}{l}{}^\alpha = 1$, $\overset{\circ}{l}{}^\beta = \overset{\circ}{l}{}^\gamma = 0$; обозначим его удлинение e_α и найдем из (6.50)

$$\rho^2/\xi^2 = 1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha},$$

после чего из (6.48)

$$e_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha}} - 1 \quad \langle a = 1, 2, 3\rangle. \qquad (6.52)$$

Следовательно, диагональные элементы матриц тензоров $\tilde{g}$, $\tilde{\mathcal{E}}$ однозначно определяют относительные удлинения координатных волокон $(\xi)_\alpha$.

Рассмотрим теперь два волокна ξ_1 и ξ_2 с направляющими косинусами

$$\overset{\circ}{l}{}^i_1 = \frac{\xi^i_1}{|\xi_1|}; \quad \overset{\circ}{l}{}^i_2 = \frac{\xi^i_2}{|\xi_2|}, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (6.53)$$

Косинус угла $\overset{\circ}{\theta}_{12}$ между ними равен

$$\cos\overset{\circ}{\theta}_{12} = \frac{\xi_1\xi_2}{|\xi_1|\,|\xi_2|} = \sum_{i=1}^{3} \overset{\circ}{l}{}^i_1\overset{\circ}{l}{}^i_2. \qquad (6.54)$$

Эти вектор-волокна после деформации согласно (6.13) преобразуются в вектор-волокна

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \widetilde{A}\boldsymbol{\xi}_1, \ \boldsymbol{\rho}_2 = \widetilde{A}\boldsymbol{\xi}_2$$

с компонентами

$$\rho_1^i = A_j^i \xi_1^j, \ \rho_2^i = A_j^i \xi_2^j$$

и направляющими косинусами

$$l_1^i = \frac{\rho_1^i}{|\boldsymbol{\rho}_1|}, \quad l_2^i = \frac{\rho_2^i}{|\boldsymbol{\rho}_2|}, \ i = 1, 2, 3.$$

Но из (6.48) $|\boldsymbol{\rho}_1|$, $|\boldsymbol{\rho}_2|$ выражаются через относительные удлинения этих волокон e_1, e_2 формулами

$$|\boldsymbol{\rho}_1| = (1 + e_1)\,|\boldsymbol{\xi}_1|, \quad |\boldsymbol{\rho}_2| = (1 + e_2)\,|\boldsymbol{\xi}_2|,$$

и потому с учетом (6.49) получим

$$l_1^i = \frac{A_j^i \xi_1^j}{|\boldsymbol{\rho}_1|} = \frac{A_j^i \overset{\circ}{l}{}_1^j}{(1 + e_1)}, \tag{6.55}$$

причем l_2^i получается из (6.55) заменой индекса 1 на 2. Косинус угла θ_{12} между деформированными волокнами $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$ будет равен

$$\cos\theta_{12} = \sum_{i=1}^{3} l_1^i l_2^i = \sum_{i=1}^{3} \frac{A_m^i A_n^i \overset{\circ}{l}{}_1^m \overset{\circ}{l}{}_2^n}{(1 + e_1)(1 + e_2)},$$

или, на основании соотношений (6.15), (6.18) и (6.54),

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{mn} \overset{\circ}{l}{}_1^m \overset{\circ}{l}{}_2^n}{(1 + e_1)(1 + e_2)} = \frac{\cos\overset{\circ}{\theta}_{12} + 2\varepsilon_{mn} \overset{\circ}{l}{}_1^m \overset{\circ}{l}{}_2^n}{(1 + e_1)(1 + e_2)}. \tag{6.56}$$

Выберем теперь в качестве начальных волокон $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ координатные $(\boldsymbol{\xi})_\alpha = \xi^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ и $(\boldsymbol{\xi})_\beta = \xi^\beta \mathbf{e}_\beta$; для них $\cos\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = 0$ и отличны от нуля только $\overset{\circ}{l}{}_\alpha^\alpha = 1$ и $\overset{\circ}{l}{}_\beta^\beta = 1$; из (6.56) получаем

$$\cos\theta_{\alpha\beta} = \frac{2\varepsilon_{\alpha\beta}}{(1 + e_\alpha)(1 + e_\beta)} = \frac{2\varepsilon_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta}}}. \tag{6.57}$$

Итак, компоненты тензора деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ со смешанными индексами пропорциональны косинусам углов между волокнами $(\boldsymbol{\rho})_\alpha$, $(\boldsymbol{\rho})_\beta$, которые до деформации были ортогональными координатными.

В теории деформаций представляют интерес еще углы поворота различных волокон. Единичный вектор $\boldsymbol{\rho}/|\boldsymbol{\rho}|$ равен

$$\frac{\boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|} = l^i \mathbf{e}_i = \frac{\rho^i \mathbf{e}_i}{|\boldsymbol{\xi}|(1+e_\xi)} = \frac{A^i_j \mathring{l}^j}{1+e_\xi}\mathbf{e}_i,$$

где $\mathring{l}^i$ — направляющие косинусы волокна $\boldsymbol{\xi}$ до деформации ($\boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{\xi}|\mathring{l}^i \mathbf{e}_i$). Следовательно, направляющие косинусы этого волокна после деформации равны

$$l^i = \frac{A^i_j \mathring{l}^j}{1+e_\xi}. \tag{6.58}$$

В частности, для координатного волокна $(\boldsymbol{\xi})_\alpha = \xi^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ имеем $\mathring{l}^\alpha_\alpha = 1$, $\mathring{l}^\beta_\alpha = 0$ и потому

$$l^i_\alpha = \frac{A^i_\alpha}{1+e_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} A^i_\alpha. \tag{6.59}$$

Деформация среды называется малой порядка $\delta \ll 1$, если для любых i, j в любой точке $\mathbf{x}$ в момент t

$$|\varepsilon_{ij}| \leqslant \delta$$

и величиной δ^2 можно пренебречь сравнительно с δ. В таком случае из (6.52), (6.57) находим

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = e_\alpha,\ \ 2\varepsilon_{\alpha\beta} = \cos\theta_{\alpha\beta} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\alpha\beta}\right) = \frac{\pi}{2} - \theta_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, при малых деформациях компонента $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ равна относительному удлинению координатного волокна $(\boldsymbol{\xi})_\alpha$, а удвоенная компонента $2\varepsilon_{\alpha\beta}$ равна уменьшению прямого угла между $(\boldsymbol{\xi})_\alpha$ и $(\boldsymbol{\xi})_\beta$.

Теперь все элементы деформации окрестности любой начальной физической точки $\mathbf{x}$ в момент t выражены через аффинор $\tilde{A}$ и метрический тензор $\tilde{g}$ или тензор деформации $\tilde{\mathscr{E}}$. Для дальнейшего необходимо учитывать выражения тензоров $\tilde{A}$, $\tilde{g}$, $\tilde{\mathscr{E}}$ либо через текущий радиус-вектор $\boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$, либо через вектор перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{x} - \mathbf{x}$, так как эти функции при движении среды являются искомыми и для них будут составляться разрешающие уравнения.

Для сокращения письма частные производные какой-нибудь функции $z(\mathbf{x}, t)$ по координатам x^i будем обозначать

$$\frac{\partial z}{\partial \mathrm{x}^i} \equiv z_{,i}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \mathrm{x}^i \partial \mathrm{x}^j} \equiv z_{,ij}. \tag{6.60}$$

Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\mathbf{u}=\boldsymbol{x}-\mathbf{x}$ в этом параграфе мы рассматриваем только в декартовых ортогональных координатах (в неподвижном репере $\mathbf{e}_i$) и потому можем не различать ко- и контравариантных их составляющих, т. е.

$$x_i = x^i, \quad u_i = u^i. \tag{6.61}$$

По индексам (i, j, k, m, $n=1$, 2, 3), повторяющимся как сверху, так и снизу, сохраняем правило суммирования и обозначаем греческими буквами (α, β, $\gamma=1$, 2, 3) индексы, по которым суммирование не производится.

Компоненты аффинора $\tilde{A}$ согласно (6.7) имеют выражения

$$A_i^m = x_{m,i} = \delta_{mi} + u_{m,i}. \tag{6.62}$$

Компоненты метрического тензора $\tilde{g}$ согласно (6.15)

$$g_{ij} = \boldsymbol{x}_{,i}\boldsymbol{x}_{,j} = A_i^m A_j^m = \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u_{m,j} \tag{6.63}$$

и, следовательно, компоненты тензора деформаций

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u_{m,j}. \tag{6.64}$$

Определитель A матрицы аффинора $\tilde{A}$ имеет выражение

$$A = |x_{i,j}| = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{vmatrix} = э_{ijk}x_{1,i}x_{2,j}x_{3,k} \tag{6.65}$$

и представляет собой кубический многочлен относительно производных $x_{i,j}$, тогда как

$$g = |g_{ij}| = |x_{m,i}x_{m,j}| = A^2 \tag{6.66}$$

многочлен шестой степени.

Контравариантные компоненты метрического тензора g^{ij} находятся через g_{ij} согласно (6.21), (6.22) по формулам

$$g^{ij} = \frac{\partial \lg g}{\partial g_{ij}}, \quad \boldsymbol{э}^\alpha = \boldsymbol{э}_j g^{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{g}}[\boldsymbol{э}_\beta, \boldsymbol{э}_\gamma],$$

$$\boldsymbol{э}_i = \boldsymbol{x}_{,i} = A_i^m \mathbf{e}_m \tag{6.67}$$

или явно (при α, β, $\gamma=1$, 2, 3 — круговой перестановке)

$$gg^{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta}g_{\gamma\gamma} - g_{\beta\gamma}^2; \quad gg^{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\beta}g_{\gamma\gamma}.$$

Уравнения совместности деформаций. Шесть компонент тензора деформаций ε_{ij} или метрического тензора $g_{ij}=\delta_{ij}+2\varepsilon_{ij}$ в окрестности любой фиксированной физической точки $\mathbf{x}$ среды могут как угодно независимо изменяться с течением времени, т. е.

задание шести произвольных функций времени $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ возможно, и деформация окрестности точки при этом будет аффинной. Но если бы мы задали для всех точек среды хотя бы в какой-нибудь момент времени t компоненты ε_{ij} или g_{ij} как произвольные непрерывно дифференцируемые функции координат, т. е. произвольно задали бы поле тензора деформации, то деформации оказались бы несовместными, т. е. между соседними частями образовались бы щели или различные физические объемы заняли бы одну и ту же область пространства. Такая возможность исключена благодаря свойству закона движения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, а именно непрерывной взаимно-однозначной зависимости между $\boldsymbol{x}$ и $\mathbf{x}$ для любого t и существованию производных. Компоненты тензора ε_{ij} (или g_{ij}) получаются путем дифференцирования вектора $\boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$, т. е. шесть скалярных функций ε_{ij} выражены через три u_i. Значит, между ε_{ij} должны существовать соотношения, полная система которых представляет уравнения совместности деформаций. По существу, они должны быть следствием независимости порядка дифференцирования вектора $\boldsymbol{x}$ типа $\mathbf{э}_{i,j} = \mathbf{э}_{j,i}$, так как $g_{ij} = \mathbf{э}_i \mathbf{э}_j$, а векторы $\mathbf{э}_i$ выражаются через один вектор: $\mathbf{э}_i = \boldsymbol{x}_{,i}$.

Производные векторов репера $\mathbf{э}_i$ по координатам могут быть также разложены по векторам базиса $\mathbf{э}_i$ или $\mathbf{э}^i$:

$$\frac{\partial \mathbf{э}_i}{\partial \mathrm{x}^j} \equiv \mathbf{э}_{i,j} = \Gamma^k_{ij.} \mathbf{э}_k = \Gamma_{ij.k} \mathbf{э}^k, \tag{6.68}$$

где вследствие симметрии $\mathbf{э}_{i,j} = \mathbf{э}_{j,i} = \boldsymbol{x}_{,ij}$

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} = \Gamma_{ij.l}\, g^{kl},$$
$$\Gamma_{ij.l} = \Gamma_{ji.l} = \Gamma^k_{ij}\, g_{kl}; \tag{6.69}$$

Γ—символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода; они симметричны по первым двум нижним индексам и определяются по заданному метрическому тензору $g_{ij}(\mathbf{x}, t)$. В самом деле, дифференцируя равенство $g_{ij} = \mathbf{э}_i \cdot \mathbf{э}_j$, имеем

$$g_{ij,k} = \Gamma_{ik.j} + \Gamma_{jk.i}. \tag{6.70}$$

Аналогично

$$g_{ik,j} = \Gamma_{ij.k} + \Gamma_{kj.i},$$
$$g_{jk,i} = \Gamma_{ji.k} + \Gamma_{ki.j},$$

откуда

$$\Gamma_{ij.k} = \frac{1}{2}\left(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}\right) = \varepsilon_{ik,j} + \varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ij,k}. \tag{6.71}$$

$\Gamma_{ij.k}$ и Γ^k_{ij} не являются тензорами, что следует из (6.68).

Математически уравнения совместности деформаций получаются как условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений (6.68) относительно $\mathfrak{z}_i$, если заданы функции $\Gamma_{ij}^k(\mathbf{x})$. Дифференцируя (6.68) по x^l, имеем

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{z}_i}{\partial \mathrm{x}^j \partial \mathrm{x}^l} \equiv \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \mathrm{x}^l} + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nl}^m \right) \mathfrak{z}_m. \tag{6.72}$$

Обозначим равную нулю при $\mathfrak{z}_i = \boldsymbol{x}_{,i}$ разность $\mathfrak{z}_{i,jl} - \mathfrak{z}_{i,lj}$ следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{z}_i}{\partial \mathrm{x}^j \partial \mathrm{x}^l} - \frac{\partial^2 \mathfrak{z}_i}{\partial \mathrm{x}^l \partial \mathrm{x}^j} \equiv R_{jli}^m \mathfrak{z}_m. \tag{6.73}$$

Из (6.72) видно, что

$$R_{jli}^m = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \mathrm{x}^l} + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nl}^m \right)_{[jl]},$$

где значок $[jl]$ означает альтернирование выражения, взятого в скобках, по индексам j, l, т. е.

$$R_{jli}^m = \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \mathrm{x}^l} + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nl}^m - \frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial \mathrm{x}^j} - \Gamma_{il}^n \Gamma_{nj}^m. \tag{6.74}$$

С помощью формул (6.70), (6.74) введем

$$R_{jlik} \equiv R_{jli}^m g_{mk} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij.k}}{\partial \mathrm{x}^l} - \Gamma_{ij}^n \Gamma_{kl.n} \right)_{[jl]}. \tag{6.75}$$

Отсюда очевидно, что справедливы формулы

$$R_{jlik} = -R_{ljik} = -R_{jlki} = R_{ikjl}, \tag{6.75'}$$
$$R_{jlik} \equiv 0 \text{ при } j = l.$$

Поэтому можно доказать, что среди всех величин R_{jlik} имеется только шесть независимых. Для этого следует обратить внимание на порядок расположения четырех индексов выражения R_{jlik} и учесть, что оно согласно (6.75) равно альтернации по первым двум индексам выражения, стоящего в скобках (6.75). Поэтому тождественно не равны нулю согласно (6.75′) только компоненты R_{mnpq}, в которых ни два первых (m, n), ни два последних (p, q) не равны между собой. Но среди четырех индексов, принимающих каждый значения (1, 2, 3), два равны между собой. Следовательно, только следующие две группы последовательно расположенных индексов $\alpha\beta\beta\alpha$ и $\alpha\beta\beta\gamma$, где $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ принимают значения (1, 2, 3), и могут дать независимые и нетождественно равные нулю выражения (6.75). Первая группа дает комбинации 1221, 2332, 3113, 1331, 3223, 2112, причем либо три первых, либо три последних

приводят к независимым компонентам, например R_{1221}, R_{2332}, R_{3113}; вторая группа $\alpha\beta\beta\gamma$ из шести возможных числовых комбинаций 1223, 2331, 3112, 1332, 3221, 2113 имеет либо первые, либо последние три независимые, дающие, например, компоненты R_{1223}, R_{2331}, R_{3112}.

Условия совместности деформаций, являющиеся тождествами, если метрический тензор $\tilde{g}$ или тензор деформации $\tilde{\mathcal{E}}$ выражены через вектор $\boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$ или вектор $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, имеют вид

$$R_{\alpha\beta\beta\alpha} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta\alpha}}{\partial \mathrm{x}^{\beta}} - \Gamma^{m}_{\alpha\beta}\,\Gamma_{\alpha\beta m} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\beta\alpha}}{\partial \mathrm{x}^{\alpha}} + \Gamma^{m}_{\beta\beta}\,\Gamma_{\alpha\alpha m} = 0, \quad (6.76)$$

$$R_{\alpha\beta\beta\gamma} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta\gamma}}{\partial \mathrm{x}_{\beta}} - \Gamma^{m}_{\alpha\beta}\,\Gamma_{\beta\gamma m} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\beta\gamma}}{\partial \mathrm{x}^{\alpha}} + \Gamma^{m}_{\beta\beta}\,\Gamma_{\alpha\gamma m} = 0,$$

$\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$, и принимают значения 1, 2, 3.

§ 7. Малые и бесконечно малые деформации

Деформацию сплошной среды в эйлеровом пространстве $\boldsymbol{x}$ за бесконечно малое время dt в любой фиксированный момент $t=t_0$ можно рассматривать с точки зрения Лагранжа, если поле вектора скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ задано и если в момент времени $t'=t_0+dt$ определить перемещение

$$\mathbf{u}'(\boldsymbol{x}, t') = \mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t')\,dt \quad (7.1)$$

и координаты частиц

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \mathbf{u}'(\boldsymbol{x}, t'). \quad (7.2)$$

В пределах интервала dt при данном t (x_1, x_2, x_3) будет лагранжевой ортогональной системой координат в репере $\mathbf{e}_i$. *Тензор бесконечно малых* деформаций среды за время dt обозначим $v_{ij}dt=\varepsilon'_{ij}$, причем v_{ij} называется *тензором скоростей деформаций среды* в эйлеровом пространстве.

Тензор деформаций ε'_{ij} находится по формулам (6.64) путем замены $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}'$, $\mathbf{x}\to\mathbf{x}'$, $\varepsilon_{ij}\to\varepsilon'_{ij}$, $\mathbf{u}\to\mathbf{u}'$,

$$2\varepsilon'_{ij} = 2v_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\,dt = u'_{i,j} + u'_{j,i} + u'_{m,i}\,u'_{m,j}, \quad (7.3)$$

причем нелинейные слагаемые в (7.3) суть бесконечно малые высшего порядка. Метрический тензор g'_{ij} находится из (6.63) и равен

$$g'_{ij} = \delta_{ij} + 2\varepsilon'_{ij}, \quad (7.4)$$

т. е. при $dt\to 0$ он равен δ_{ij}. Внося в (7.3) выражения $\mathbf{u}'$ из (7.1), деля на dt и отбрасывая бесконечно малые величины, получим

выражения компонент тензора скоростей деформаций в эйлеровом пространстве

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{7.5}$$

С другой стороны, можно рассматривать малые относительные перемещения точек среды, т. е. такие, что в *любой момент времени* $t > t_0$ (t_0 — начальный момент) перемещение точек $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{x} - \mathbf{x}$ обладает свойством

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{x}_j}\right| \leqslant \delta, \ \delta \ll 1, \tag{7.6}$$

для всех i, j и в любой точке $\mathbf{x}$. В этом случае можно исключить переносное движение среды (связывая систему координат $\boldsymbol{x}$ с какими-нибудь физическими волокнами и плоскостью в точке $\mathbf{x}=0$); из (7.6) получим, что в подвижной системе сам вектор перемещения $\mathbf{u}$ будет малым порядка δ сравнительно с размерами области, занятой средой. Разница между этим и рассмотренным выше случаем в том, что в случае (7.1) $\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} dt$ является бесконечно малой величиной.

Мы рассмотрим случай малых порядков δ перемещений, затем автоматически распространим все результаты на бесконечно малые деформации. Неточность всех формул теории малых деформаций будет порядка δ сравнительно с единицей. Соответствующие формулы в случае бесконечно малых деформаций будут точными. Вектор относительного перемещения $\boldsymbol{\delta}$ точки N относительно M в момент t, очевидно, равен

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) - \boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi},$$

или согласно (6.6), (6.7)

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}_j}\xi_j - \boldsymbol{\xi} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{x}_j}\right)\xi_j \mathbf{e}_i - \xi_i \mathbf{e}_i = \frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{x}_j}\xi_j \mathbf{e}_i,$$

$$\delta_i = \frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{x}_j}\xi_j, \quad \rho_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{x}_j}\right)\xi_j. \tag{7.7}$$

Пренебрегая малыми порядка δ^2 сравнительно с δ, из (6.63), (6.64) получим для компонент метрического тензора g_{ij} и тензора деформаций ε_{ij} выражения

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{x}_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \mathrm{x}_i}\right) \quad (i, \ j = 1, \ 2, \ 3). \tag{7.8}$$

Соотношения (7.8) представляют *формулы Коши,* выражающие тензор малой деформации через вектор перемещения $\mathbf{u}$. Соответствующие выражения компонент тензора скоростей деформации v_{ij} в эйлеровом пространстве, как видим, получаются из (7.8) простой заменой $\mathbf{u}$ на $\mathbf{v}$ и $\mathbf{x}$ на $\boldsymbol{x}$ и приводят к *формулам Стокса:*

$$v_{ij} = v_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{7.9}$$

Малые и бесконечно малые деформации аддитивны в том смысле, что если даны два поля перемещения $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t)$ с соответствующими деформациями $\overset{1}{\varepsilon}_{ij}$, $\overset{2}{\varepsilon}_{ij}$, вычисляемыми по формулам Коши (7.8), то полю перемещения $\mathbf{u}=\mathbf{u}^1+\mathbf{u}^2$ соответствуют деформации ε_{ij}, равные сумме соответствующих деформаций:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, t), \quad \varepsilon_{ij} = \overset{1}{\varepsilon}_{ij} + \overset{2}{\varepsilon}_{ij}. \tag{7.10}$$

Аналогичное верно для двух полей скоростей $\mathbf{v}^1(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t)$ в эйлеровом пространстве при любых деформациях на основании формул Стокса (7.9):

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{v}^1(\boldsymbol{x}, t) + \mathbf{v}^2(\boldsymbol{x}, t), \quad v_{ij} = \overset{1}{v}_{ij} + \overset{2}{v}_{ij}. \tag{7.11}$$

На основании формул (6.52) и (6.57), как уже отмечалось в § 6, можно установить кинематический смысл компонент тензора малых деформаций. Из формулы (6.52) находим с рассматриваемой точностью

$$(1 + e_\alpha)^2 = 1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha}; \quad e_\alpha = \varepsilon_{\alpha\alpha}.$$

Косинус угла $\theta_{\alpha\beta}$ между координатными волокнами α и β, равный нулю до деформации, после деформации согласно формуле (6.57) равен

$$\cos\theta_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}(1 - \varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\beta\beta}) = 2\varepsilon_{\alpha\beta},$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{\alpha\beta} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\alpha\beta}\right) = 2\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Следовательно, компоненты тензора малой деформации с одинаковыми индексами суть относительные удлинения координатных волокон, а удвоенные компоненты малой деформации со смешанными индексами суть уменьшения прямых углов между парами координатных волокон, называемые сдвигами.

Координатный вектор-волокно $(\boldsymbol{\xi})_\alpha = \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ в результате малой деформации станет вектор-волокном $(\boldsymbol{\rho})_\alpha$, направляющие косинусы которого согласно (6.59) определяются формулами

$$l_\alpha^i = \frac{A_\alpha^i}{1+e_\alpha} = (1-\varepsilon_{\alpha\alpha})\,\delta_{i\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha},$$

$$(\rho)_\alpha = |(\rho)_\alpha|\, l_\alpha^i \mathbf{e}_\alpha = \xi_\alpha \left(\delta_{i\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right) \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3. \qquad (7.12)$$

Разложение тензора относительного перемещения на тензор чистой деформации и тензор поворота. Вводя тензор $\tilde{\omega}$, на основании (7.8) можно рассмотреть тождество

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}, \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \qquad (7.13)$$

причем $\tilde{\omega}$ называется тензором поворота. Тензор поворота $\tilde{\omega}$ антисимметричен, причем $\omega_{11}=\omega_{22}=\omega_{33}=0$ и потому он может быть выражен через вектор $\boldsymbol{\omega}$, называемый *ротором вектора* $\mathbf{u}$, или вектором поворота окрестности точки $\mathbf{x}$,

$$\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \omega_i \mathbf{e}_i. \qquad (7.14)$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ связаны с компонентами тензора $\tilde{\omega}$ соотношениями

$$\omega_\alpha = -\omega_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma}\right). \qquad (7.15)$$

На основании разложения (7.13) вектор относительного перемещения $\boldsymbol{\delta}$ (7.7) представим в виде суммы

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^\varepsilon + \boldsymbol{\delta}^\omega, \qquad (7.16)$$

причем

$$\boldsymbol{\delta}^\varepsilon = \delta_i^\varepsilon \mathbf{e}_i = \varepsilon_{ij}\xi_j \mathbf{e}_i \qquad (7.17)$$

называется перемещением, связанным с чистой деформацией, а

$$\boldsymbol{\delta}^\omega = \omega_{ij}\xi_j \mathbf{e}_i = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}] \qquad (7.18)$$

называется перемещением, связанным с поворотом $\boldsymbol{\omega}$ всей окрестности точки M как целого. Равенство $\boldsymbol{\delta}^\omega$ векторному произведению $[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}]$ проверяется непосредственно на основании (7.15) и определения

$$[\omega,\ \xi] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}. \qquad (7.19)$$

Чтобы пояснить наименования векторов $\boldsymbol{\delta}^\varepsilon$ и $\boldsymbol{\delta}^\omega$, рассмотрим окрестность какой-нибудь фиксированной физической точки, в ко-

торой ε_{ij}, ω_{ij} в момент t суть константы, а с изменением времени — функции времени t. Переобозначим вектор $\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\delta}\to\mathbf{u}$ так, что вместо (7.16) получим $\mathbf{u}=\mathbf{u}^1+\mathbf{u}^2$, причем

$$\mathbf{u}^1 = \varepsilon_{ij}(t)\,x_j\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{u}^1 \equiv \boldsymbol{\delta}^\varepsilon,$$
$$\mathbf{u}^2 = \omega_{ij}(t)\,x_j\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{u}^2 \equiv \boldsymbol{\delta}^\omega. \tag{7.20}$$

Вычисляя деформации $\overset{1}{\varepsilon}_{ij}$, $\overset{2}{\varepsilon}_{ij}$ по формулам Коши, найдем

$$\overset{1}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}(t), \quad \overset{2}{\varepsilon}_{ij} = 0. \tag{7.21}$$

Так как $\mathbf{u}=\mathbf{u}^1+\mathbf{u}^2$ — полное перемещение, причем $\overset{2}{\varepsilon}_{ij}=0$, то действительно векторы $\boldsymbol{\delta}^\varepsilon$ и $\boldsymbol{\delta}^\omega$ соответственно определяют чистую (полную) деформацию и движение без деформации, т. е. поворот всей физической окрестности рассматриваемой точки как абсолютно твердого тела.

Тензору $\tilde{\mathscr{E}}$ в соответствие ставится квадратичная форма

$$2\Phi(\mathbf{X}) = \varepsilon_{ij}X_iX_j$$

и поверхность Коши $2\Phi=\mathrm{const}$, причем вектор $\mathbf{X}$ выбирается в любом масштабе по волокну $\boldsymbol{\xi}$ ($\mathbf{X}=\lambda\boldsymbol{\xi}$, $\lambda=\mathrm{const}$); из (7.17) ясно, что

$$\lambda\boldsymbol{\delta}^\varepsilon = \operatorname{grad}\Phi,$$

т. е. направление относительного перемещения, связанное с чистой деформацией, совпадает с направлением нормали к поверхности Коши. Три главных ортогональных направления тензора $\tilde{\mathscr{E}}$ находятся из условия $\tilde{\mathscr{E}}\mathbf{X}=\operatorname{grad}\Phi$, причем три главных удлинения ε_1, ε_2, ε_3 являются корнями кубического уравнения (равенства нулю определителя системы)

$$-\varepsilon^3 + I_1\varepsilon^2 - I_2\varepsilon + I_3 = 0,$$

где инварианты имеют выражения

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ij}\delta_{ij} = \varepsilon_{ii},$$
$$I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = 1/2\,(I_1^2 - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}), \tag{7.22}$$
$$I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = |\varepsilon_{ij}|.$$

Заметим, что хотя сдвиги в главных осях деформаций отсутствуют, вектор $\dot{\boldsymbol{\omega}}=\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t$, т. е. мгновенная угловая скорость, не равен скорости поворота в момент t главного репера (трехгранника главных осей), так как главные оси деформации с течением времени изменяют свою ориентацию относительно частицы.

Отношение объема V частицы к ее начальному объему V_0 равно $\sqrt{g}=\sqrt{|g_{ij}|}$. Но с точностью до δ^2

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_{11} & 2\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{21} & 1+2\varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} & 2\varepsilon_{32} & 1+2\varepsilon_{33} \end{vmatrix} = 1 + 2I_1, \qquad (7.23)$$

и поэтому относительное объемное расширение частицы будет равно

$$\theta = \frac{V - V_0}{V_0} = \sqrt{g} - 1 = I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{u}. \qquad (7.24)$$

Закон сохранения массы $\rho(1+\theta) = \rho_0$ дает выражение плотности ρ через θ и начальную плотность ρ_0:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+\theta} = (1-\theta)\rho_0. \qquad (7.25)$$

В частности, если можно пренебречь изменением плотности, то условие объемной несжимаемости вещества имеет вид

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \qquad (7.26)$$

Разложение тензора малой деформации на девиатор и шаровой тензор. Девиатором деформаций называется тензор с компонентами $\tilde{\varepsilon}_{ij}$,

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}, \quad \varepsilon = 1/3\,\theta, \qquad (7.27)$$

причем $\varepsilon\delta_{ij}$ называется шаровым тензором, так как соответствующая ему поверхность есть сфера

$$\tilde{\varepsilon}\delta_{ij}X_iX_j \equiv \varepsilon(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) = \text{const}.$$

Первый инвариант девиатора деформаций $I_{1\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\varepsilon}_{ij}\delta_{ij} = 0$, второй

$$-2I_{2\tilde{\varepsilon}} \equiv \text{э}^2 = \tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_1^2 + \tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2, \qquad (7.28)$$

где $\tilde{\varepsilon}_1$, $\tilde{\varepsilon}_2$, $\tilde{\varepsilon}_3$ — главные компоненты девиатора деформаций.

Относительное перемещение $\boldsymbol{\delta}^\varepsilon$ (7.17) в главных осях деформаций имеет выражение (в главном репере $\mathbf{e}_{i0}$)

$$\boldsymbol{\delta}^\varepsilon = \varepsilon_i \xi_i \mathbf{e}_{i0}.$$

Рассматривая октаэдрическую площадку (отсекающую равные отрезки по главным осям) и волокно ξ, равно наклоненное к главным осям, так что $\xi_i = |\xi|/\sqrt{3}$, найдем его относительное удлинение

$$\varepsilon_\xi = \boldsymbol{\delta}^\varepsilon \boldsymbol{\xi}/\xi^2 = 1/3\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varepsilon = \theta/3.$$

Сдвиг конца волокна ξ (линейный сдвиг октаэдрической площадки) равен $\sqrt{(\delta\varepsilon)^2-\xi^2\varepsilon_\xi^2}$, относительный сдвиг получается делением на $|\xi|$. Удвоенный относительный сдвиг октаэдрической площадки называется *октаэдрическим сдвигом* γ_ν:

$$\gamma_\nu = 2\sqrt{(\delta\varepsilon)^2-\xi^2\varepsilon_\xi^2}/|\xi| = 2\sqrt{1/3(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)-\varepsilon^2}.$$

На основании (7.28) получаем

$$\frac{2\mathit{э}}{\sqrt{3}} = \gamma_\nu = 2/\sqrt{3}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1^2+\tilde{\varepsilon}_2^2+\tilde{\varepsilon}_3^2} =$$

$$= 2/3\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}, \qquad (7.29)$$

т. е. пропорционален корню из второго инварианта девиатора деформации. Величина $\mathit{э}=\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}}$ называется *модулем девиатора*, или *интенсивностью деформации*. Аналогичные формулы верны для девиатора скоростей деформаций ($\tilde{v}_k$ — главные компоненты)

$$\tilde{v}_{ij} = v_{ij} - 1/3 v_{kk}\delta_{ij}, \quad \tilde{v}^2 = \tilde{v}_{ij}\tilde{v}_{ij} =$$

$$= 1/3\left[(\tilde{v}_1-\tilde{v}_2)^2+(\tilde{v}_2-\tilde{v}_3)^2+(\tilde{v}_3-\tilde{v}_1)^2\right]. \qquad (7.29')$$

Условия совместности Сен-Венана для малых деформаций получаются из (6.76), (6.71). Символы Кристофеля (учитывая $g_{ij}=\delta_{ij}+2\varepsilon_{ij}$) будут малыми порядка δ, а их произведения — порядка δ^2, и потому вторая группа слагаемых в (6.76) должна быть опущена. В результате получаем шесть уравнений

$$\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial\Gamma_{\beta\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial\Gamma_{\beta\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}, \qquad (7.30)$$

из которых следуют шесть условий Сен-Венана:

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2},$$

. . . .
. . . .

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right), \qquad (7.31)$$

. . . .
. . . .

(в каждой из выписанных формул следует сделать круговую перестановку индексов 1, 2, 3). Естественно, что если в (7.31) внести

выражения ε_{ij} по формулам Коши (7.8), получатся тождества, и потому иногда (7.31) называют тождествами Сен-Венана.

Все полученные выше для малых деформаций среды формулы при указанной ранее замене $\mathbf{x}\to\boldsymbol{x}, \mathbf{u}\to\mathbf{v}$, $\varepsilon_{ij}\to v_{ij}$ справедливы для мгновенных деформаций ее в эйлеровом пространстве, но имеют соответствующую трактовку. Заменяя $\mathbf{u}$ на $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ на $\mathbf{v}_{ij}$, $\mathbf{x}$ на $\boldsymbol{x}$, из (7.14) и (7.15) находим

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}=\Omega_i\mathbf{e}_i,$$

$$\Omega_\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\beta}-\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\gamma}\right),\quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(1,\ 2,\ 3), \tag{7.32}$$

причем $\boldsymbol{\Omega}$ называется *вектором вихря* — вектором мгновенной угловой скорости вращения частицы среды как твердой. Тензор v_{ij}

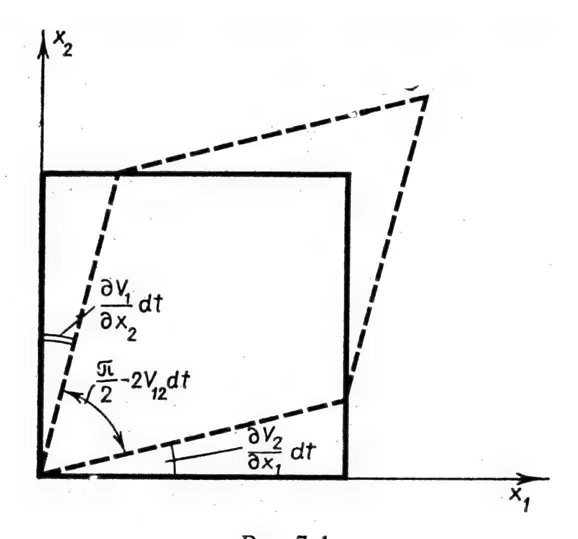


Рис. 7. 1

(7.9) представляет тензор скоростей деформаций частицы, т. е. компоненты v_{11}, v_{22}, v_{33} суть мгновенные скорости относительных удлинений координатных волокон, взятых по осям x_i, а удвоенные смешанные компоненты $2v_{12}$, $2v_{23}$, $2v_{31}$ — скорости сдвигов (скольжения) координатных площадок. (Их механический смысл понятен из рис. 7.1).

Инвариантам (7.22) соответствуют инварианты тензора скоростей деформаций

$$I_1=v_{11}+v_{22}+v_{33}=v_{ij}\delta_{ij}=\operatorname{div}\mathbf{v},$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - v_{ij}v_{ij}), \tag{7.33}$$

$$I_3 = |v_{ij}|.$$

Объему V_0 в (7.24) теперь соответствует объем частицы в момент t (ρ_0 — плотность в этот момент), объему V — объем в момент $t+dt$ (ρ — плотность). Следовательно, $d\theta = -d\rho/\rho$, и потому из (7.24) имеем

$$\frac{\partial\theta}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \tag{7.34}$$

причем $d\rho/dt$ — субстанциональная производная:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}.$$

Из (7.34) находим

$$\theta = \ln\frac{\rho_0}{\rho}. \tag{7.35}$$

Следовательно, мы получили *условие сохранения массы частицы в эйлеровом пространстве*, выражающееся одним из уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0, \quad \frac{d\ln\rho}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{7.36}$$

Условие *объемной несжимаемости* среды имеет вид $d\rho/dt = 0$, или

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{7.37}$$

Условия совместности компонент тензора скоростей деформаций v_{ij} получаются из (7.31) заменой ε_{ij} на v_{ij} и $\mathbf{x}$ на $\boldsymbol{x}$.

Движение среды называется *безвихревым, или потенциальным*, если $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$. При этом из условий

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3) \tag{7.38}$$

следует существование потенциала скоростей $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$

$$v_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad \mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi. \tag{7.39}$$

Если к тому же среда несжимаема, то из (7.37) следует

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \Delta\varphi = 0, \tag{7.40}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

и называется оператором Лапласа. Потенциал скоростей φ — гармоническая функция. Этим свойством обладает движение идеальной несжимаемой жидкости в потенциальном поле сил, если в какой-нибудь момент $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$.

Движение любой сплошной среды, рассматриваемое в эйлеровом пространстве, обладает некоторыми свойствами, вытекающими из определений линий токов, вихрей и закона сохранения массы. Как уже отмечалось в § 4, линией тока в момент t называется траектория вектора скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, проходящая через какую-нибудь точку $\boldsymbol{x}_0$, т. е. линия, определяемая дифференциальным уравнением

$$d\boldsymbol{x} = \mathbf{v}(\boldsymbol{x},\ t)\,d\lambda, \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = d\lambda, \tag{7.41}$$

где λ — параметр. Решение этого уравнения

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}_0,\ \lambda,\ t); \quad x_i = f_i(\boldsymbol{x}_0,\ \lambda,\ t) \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{7.42}$$

является параметрическим уравнением линии тока. Если в момент $t=\text{const}$ рассмотреть какую-нибудь линию $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\varphi}(\mu)$, то из (7.42) получим $\boldsymbol{x}=\mathbf{f}(\mu, \lambda)$, т. е. уравнение поверхности. Если линия $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\varphi}(\mu)$ замкнута, то поверхность $\boldsymbol{x}=\mathbf{f}(\mu, \lambda)$ называется *трубкой тока*.

Потоком массы среды через любую неподвижную поверхность $\mathcal{F}$ называется секундный расход

$$\int_{\mathcal{F}} \rho\mathbf{v}\boldsymbol{\nu}\,d\Sigma = \int_{\mathcal{F}} \rho v_\nu\,d\Sigma,$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — нормаль, $\mathbf{v}\boldsymbol{\nu}=v_\nu$ — нормальная составляющая скорости $\mathbf{v}$, $d\Sigma$ — элемент площади поверхности.

Вектор скорости $\mathbf{v}$ лежит на поверхности трубки тока, и потому поток массы среды внутрь трубки равен нулю. Рассмотрим в фиксированный момент t внутри области движения среды произвольный объем V, ограниченный замкнутой поверхностью Σ. Проинтегрируем по V умноженное на $dV=dx_1dx_2dx_3$ уравнение (7.36); получим

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)\,dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV.$$

Но по формуле Грина — Остроградского

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV \equiv \int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\,dV = \int_\Sigma \mathbf{A}\boldsymbol{\nu}\,d\Sigma. \tag{7.43}$$

Следовательно,

$$\int_\Sigma \rho\mathbf{v}\boldsymbol{\nu}\,d\Sigma = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV, \tag{7.44}$$

т. е. поток массы через любую замкнутую неподвижную поверхность Σ равен секундному ее изменению в объеме V с обратным знаком.

Из определения вектора вихря $\mathbf{\Omega}$ (7.32) следует

$$\operatorname{div}\mathbf{\Omega} = \frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i} = 0. \tag{7.45}$$

Внося $\mathbf{\Omega}$ вместо $\mathbf{A}$ в (7.43), получим теорему Стокса

$$\int_{\Sigma} \mathbf{\Omega}\boldsymbol{\nu}\,d\Sigma = 0, \tag{7.46}$$

т. е. поток вихря через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если $\mathcal{F}$ — незамкнутая поверхность, ограниченная замкнутым контуром L, то поток вихря через $\mathcal{F}$ равен интегралу по $\mathcal{F}$ от $\mathbf{\Omega}\boldsymbol{\nu}\,d\Sigma$. Но для любого вектора $\mathbf{B}$ по формуле Стокса

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}\mathbf{B}\boldsymbol{\nu}\,d\Sigma = \int_{L} \mathbf{B}\,d\mathbf{S}, \tag{7.47}$$

где $d\mathbf{S}$ обозначает вектор-элемент длины дуги контура L; выражение, стоящее в правой части (7.47), называется *циркуляцией вектора* $\mathbf{B}$ по L. Полагая $\mathbf{B}=\mathbf{v}$, получим

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{\Omega}\boldsymbol{\nu}\,d\Sigma = \int_{L} \mathbf{v}\,d\mathbf{S} \equiv \Gamma, \tag{7.48}$$

т. е. еще одну теорему Стокса: поток вихря через незамкнутую поверхность $\mathcal{F}$ равен циркуляции Γ вектора скорости по ограничивающему $\mathcal{F}$ контуру L.

Отметим еще важное для дальнейшего свойства интегралов от различных функций $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ по объему V_g фиксированной массы среды, т. е. ограниченному замкнутой поверхностью Σ_g, состоящему из неизменных физических частиц. Найдем полную производную по времени от интеграла

$$I = \int_{V_g} \varphi(\boldsymbol{x},\ t)\,\rho(\boldsymbol{x},\ t)\,dV. \tag{7.49}$$

Так как область интегрирования (V_g) меняется со временем, то на основании закона движения частиц $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathrm{x},\ t)$ преобразуем (7.49) к лагранжевым координатам. Из условия сохранения массы физической частицы имеем

$$\rho\,dV = \rho(\boldsymbol{x},\ t)\,dx_1dx_2dx_3 = \rho_0\,dV_0 = \rho_0(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}_1d\mathrm{x}_2d\mathrm{x}_3,$$

на основании закона движения

$$\varphi(\boldsymbol{x},\ t) = \chi(\mathrm{x},\ t).$$

Область V_0 (для фиксированной массы) не изменяется со временем. Тогда получим

$$I = \int_{V_g} \rho\varphi dV = \int_{V_0} \chi(\mathbf{x},\ t)\,\rho_0(\mathbf{x})\,dV_0$$

и, следовательно,

$$\frac{dI}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial\chi(\mathbf{x},\ t)}{\partial t}\,\rho_0(\mathbf{x})\,dV_0.$$

Переходя обратно от $\mathbf{x}$ к $\boldsymbol{x}(\mathbf{x},\ t)$ и учитывая, что для неизменной частицы

$$\frac{\partial\chi(\mathbf{x},\ t)}{\partial t} = \frac{d\varphi(\boldsymbol{x},\ t)}{dt},$$

получим

$$\frac{d}{dt}\int_{V_g} \varphi(\boldsymbol{x},\ t)\,\rho(\boldsymbol{x},\ t)\,dV = \int_{V_g} \frac{d\varphi(\boldsymbol{x},\ t)}{dt}\,\rho(\boldsymbol{x},\ t)\,dV. \qquad (7.50)$$

Если объем V и граница области Σ фиксированы и неизменны в эйлеровом пространстве, то, обозначая их V_C, Σ_C, получим конечно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_C} \varphi(\boldsymbol{x},\ t)\,dV = \int_{V_C} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dV.$$

§ 8.1. Тензор напряжений

Основная идея теории внутренних сил в МСС уже изложена в § 4: любой объем, мысленно выделенный внутри среды, находится в равновесии под действием массовых сил и «внутренних», непрерывно распределенных по ограничивающей поверхности.

Выделим в некоторой точке $M(\mathbf{x})$ среды в деформированном состоянии бесконечно малый тетраэдр $MABC$ (рис. 8.1), основные ребра которого MA, MB и MC колинеарны векторам репера $\boldsymbol{э}_1$, $\boldsymbol{э}_2$, $\boldsymbol{э}_3$.

Обозначим удвоенные площади треугольника MBC через $d\Sigma^1$, треугольника MAC — через $d\Sigma^2$, треугольника MAB — через $d\Sigma^3$, а треугольника ABC — через $d\Sigma^\nu$. Единичные векторы нормалей площадок $d\Sigma^\alpha$, очевидно, колинеарны векторам $\boldsymbol{э}^\alpha$ $(\alpha=1,2,3)$. Величины этих площадок определяются через начальные

$$d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\alpha = d\mathrm{x}^\beta d\mathrm{x}^\gamma$$

соотношениями (6.27)

$$d\Sigma^\alpha = \sqrt{gg^{\alpha\alpha}}\,d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\alpha. \qquad (8.1)$$

Напомним, что по греческим индексам суммирование не происходит. Вектор-площадь треугольника ABC подсчитывается по формуле (6.32):

$$d\Sigma^{\nu}\cdot \boldsymbol{\nu} = \sqrt{g}\, d\overset{\circ}{\Sigma}{}^{i} \mathbf{э}^{i}, \tag{8.2}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к площадке ABC:

$$\boldsymbol{\nu} = \nu_i \mathbf{э}^i = \nu^i \mathbf{э}_i, \quad \nu^{\alpha} = \nu_i g^{\alpha i}, \quad \nu_{\alpha} = \nu^i g_{\alpha i}, \tag{8.3}$$

причем ν_i — ковариантные, ν^i — контравариантные компоненты $\boldsymbol{\nu}$.

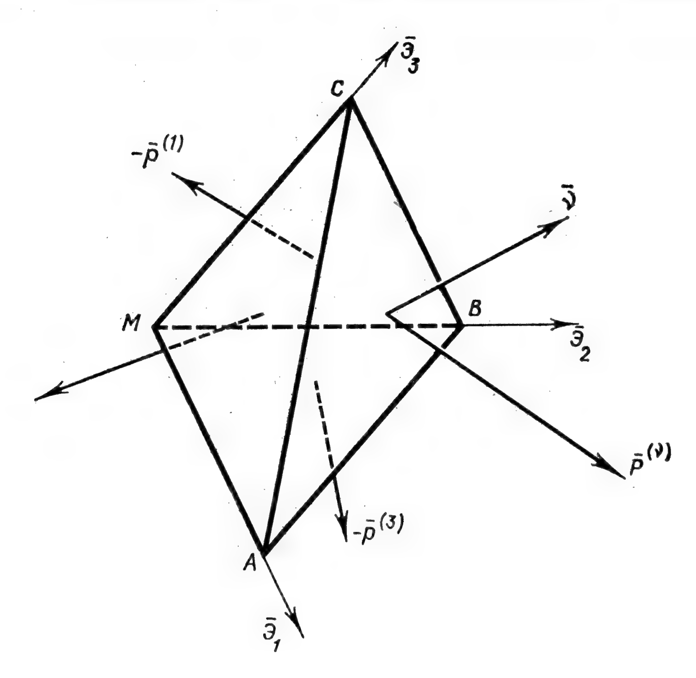


Рис. 8.1

Из формул (8.1) и (8.2) находятся выражения $d\Sigma^{\alpha}$ через $d\Sigma^{\nu}$ и $\boldsymbol{\nu}$:

$$d\Sigma^{\alpha} = \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\, \nu_{\alpha}\, d\Sigma^{\nu}. \tag{8.4}$$

Как установлено в § 4, взаимодействие рассматриваемой нами частицы-тетраэдра с окружающей средой реализуется за счет векторов внутренних сил, действующих по граням, с точностью до малых порядка $|d\mathbf{x}|$, равномерно по ним распределенных. На каждую из площадок $d\Sigma^{\alpha}$ действует поверхностная сила плотности $\mathbf{P}^{(\alpha)}$, а на площадку $d\Sigma^{\nu}$ — поверхностная сила плотности $\mathbf{P}^{(\nu)}$.

Эти векторы называются *векторами внутренних напряжений*. С точностью до малых высшего порядка, силы, действующие по граням тетраэдра, равны

$$-\mathbf{P}^{(\alpha)}d\Sigma^{\alpha}+O(|d\mathbf{x}|^{3})\quad(\alpha=1,\ 2,\ 3). \tag{8.5}$$

(Мы здесь учли, что векторы внешней нормали к площадкам $d\Sigma^{\alpha}$ направлены в обратную сторону по отношению к векторам $\mathfrak{э}^{\alpha}$). Очевидно, элементарный объем тетраэдра $dV=d\Sigma^{\nu}\,h/3$, где h — величина перпендикуляра, опущенного из точки M на $d\Sigma^{\nu}$. Учитывая еще равенства (8.4), (8.5), получим на основании принципа Даламбера

$$d\Sigma^{\nu}\left[\frac{1}{3}\Big(\rho\mathbf{F}-\rho\mathbf{w}\Big)h+\mathbf{P}^{(\nu)}-\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{P}^{(\alpha)}\nu_{\alpha}\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\right]+$$
$$+O(|d\mathbf{x}|^{3})=0, \tag{8.6 }$$

где $\mathbf{w}$ — ускорение; слагаемое порядка h учитывает силу инерции и массовую силу $\mathbf{F}$, действующие на частицу. Сокращая на $d\Sigma^{\nu}$ и устремляя $h\to 0$ вместе с $|\mathbf{dx}|$, получим условие равновесия бесконечно малого тетраэдра

$$\mathbf{P}^{(\nu)}=\sqrt{g^{11}}\,\mathbf{P}^{(1)}\nu_1+\sqrt{g^{22}}\,\mathbf{P}^{(2)}\nu_2+\sqrt{g^{33}}\,\mathbf{P}^{(3)}\nu_3=$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\sqrt{g^{ii}}\,\mathbf{P}^{(i)}\nu_i. \tag{8.6}$$

Эта очень важная формула называется выражением вектора истинного напряжения на косой площадке с нормалью $\boldsymbol{\nu}$ через основные координатные векторы напряжений. Она доказывает, что *вектор внутреннего напряжения* $\mathbf{P}^{(\nu)}$ на площадке с нормалью $\boldsymbol{\nu}$ — *линейная функция* $\boldsymbol{\nu}$ с коэффициентами, не зависящими от $\boldsymbol{\nu}$. Формула (8.6) справедлива как для внутренних площадок $d\Sigma^{\nu}$, так и для площадок, расположенных на границе Σ области движения среды; из закона равенства действия и противодействия заданная на границе тела сила $\mathbf{P}^{(\nu)}_{\text{внешн}}$ равна $\mathbf{P}^{(\nu)}$, имеющей выражение (8.6). Естественно, что $\mathbf{P}^{(\nu)}_{\text{внешн}}$ может быть любой функцией координат и нормали $\boldsymbol{\nu}$ на Σ.

Обозначим векторы, называемые основными контравариантными векторами напряжения:

$$\mathbf{S}^{\alpha}=\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\,\mathbf{P}^{(\alpha)},\qquad \begin{aligned}\mathbf{S}^{1}&=\sqrt{g^{11}}\,\mathbf{P}^{(1)}\\ \mathbf{S}^{2}&=\sqrt{g^{22}}\,\mathbf{P}^{(2)}\\ \mathbf{S}^{3}&=\sqrt{g^{33}}\,\mathbf{P}^{(3)}.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Как видим, векторы $\mathbf{S}^{\alpha}$ не зависят от $\mathbf{v}$ и отличаются от векторов истинных напряжений, хоть и колинеарны им, так как $g^{\alpha\alpha} \neq 1$ при всевозможных значениях t.

Из (8.6) с помощью новых обозначений получим

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = \mathbf{S}^i\nu_i = S^{ij}\nu_i\mathbf{э}_j, \quad \mathbf{P}^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}\mathbf{S}^{\alpha} = \frac{S^{\alpha j}\mathbf{э}_j}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}, \tag{8.8}$$

при этом вектор $\mathbf{S}^i$ мы представили в репере $\mathbf{э}_j$

$$\mathbf{S}^i = S^{ij}\mathbf{э}_j. \tag{8.9}$$

Нормальная составляющая вектора $\mathbf{P}^{(\nu)}$ на площадке $d\Sigma^{\nu}$ является скалярной величиной и с учетом (8.3) имеет значение

$$N^{(\nu)} \equiv \boldsymbol{\nu}\mathbf{P}^{(\nu)} = S^{ij}\nu_i\boldsymbol{\nu}\mathbf{э}_j = S^{ij}\nu_i\nu_j. \tag{8.10}$$

Поскольку $\boldsymbol{\nu}$ — вектор и $N^{(\nu)}$ — скаляр, то из (8.10) следует (по обратному признаку тензора), что S^{ij} представляют *контравариантные компоненты тензора напряжений* $\widetilde{S}$. Касательная составляющая $\mathbf{P}^{(\nu)}$ равна

$$T^{(\nu)} = \sqrt{(\mathbf{P}^{(\nu)})^2 - (N^{(\nu)})^2}. \tag{8.11}$$

Так как в (8.7) множитель $\sqrt{g^{\alpha\alpha}}$ при $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ различен для разных α, то выражение $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ в репере $\mathbf{э}_j$

$$\mathbf{P}^{(\alpha)} = P^{(\alpha j)}\mathbf{э}_j \tag{8.12}$$

приводит к объекту $P^{(ij)}$, не являющемуся тензором.

Тензор S^{ij} симметричен, поскольку приложенные к частице внешние (массовые) силы дают момент относительно центра частицы, являющийся величиной, малой более высокого порядка сравнительно с бесконечно малым порядка dV. Обычно рассматриваемые в механике силы, как указывалось, обладают этим свойством.

Доказательство симметрии компонент S^{ij} следует из уравнения моментов для параллелепипеда, если учесть, что момент векторов сил $\mathbf{P}^{(\alpha)}d\Sigma_{\alpha}$, действующих по всем шести граням, должен равняться нулю с точностью, включающей малые порядка dV. При этом напряжения $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ считаются равномерно распределенными по соответствующим граням и, значит, векторы $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ $d\Sigma^{\alpha}$ — приложенными в центрах граней параллелограммов. Например, вектор $\mathbf{P}^{(3)}d\Sigma^3$ приложен в точке с координатой (относительно M) $\mathbf{r}^3 = 1/2(\mathbf{э}_1 dx^1 + \mathbf{э}_2 dx^2)$ на нижней площадке $d\Sigma^3$ и равный ему (с точностью до малых высшего порядка) — в точке с координатой $\mathbf{r}_3' = 1/2(\mathbf{э}_1 dx^1 + \mathbf{э}_2 dx^2) + \mathbf{э}_3 dx^3$ — на верхней $d\Sigma^3$. С точностью до малых высшего порядка момент сил, действующих по нижней и верхней граням $d\Sigma^3$, равен

$$\mathbf{m}_3 = [\mathbf{P}^{(3)}\, d\Sigma^3,\ \mathbf{r}_3'] - [\mathbf{P}^{(3)}\, d\Sigma^3,\ \mathbf{r}_3] = [\mathbf{P}^{(3)},\ (\mathbf{r}_3' - \mathbf{r}_3)]\, d\Sigma^3 = [\mathbf{P}^{(3)},\ \mathfrak{Э}_3]\, dx^3\, d\Sigma^3. \tag{8.13}$$

Но

$$d\Sigma^3 = \sqrt{g}\sqrt{g^{33}}\, dx^1 dx^2,$$

и потому, учитывая (8.7) и (8.9), получаем

$$\mathbf{m}_3 = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, [\mathbf{S}^3,\ \mathfrak{Э}_3] = dV S^{3j} [\mathfrak{Э}_j,\ \mathfrak{Э}_3]. \tag{8.14}$$

Моменты $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ по граням $d\Sigma^1$ и $d\Sigma^2$ аналогичны, и потому условие $\mathbf{m}=\mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2+\mathbf{m}_3=0$ принимает вид

$$\mathbf{m} = dV\, \{S^{1j}[\mathfrak{Э}_j,\ \mathfrak{Э}_1] + S^{2j}[\mathfrak{Э}_j,\ \mathfrak{Э}_2] + S^{3j}[\mathfrak{Э}_j,\ \mathfrak{Э}_3]\} = dV S^{ij}[\mathfrak{Э}_j,\ \mathfrak{Э}_i] = 0. \tag{8.15}$$

Учитывая, что $[\mathfrak{Э}_i,\ \mathfrak{Э}_j] = -[\mathfrak{Э}_j,\ \mathfrak{Э}_i]$, из (8.15) имеем

$$(S^{12} - S^{21})\, \mathfrak{Э}^3 + (S^{23} - S^{32})\, \mathfrak{Э}^1 + (S^{31} - S^{13})\, \mathfrak{Э}^2 = 0, \tag{8.16}$$

откуда и следуют условия симметрии $S^{ij}=S^{ji}$.

Из свойства симметрии тензора $\tilde{S}$ следует закон взаимности напряжений на основных площадках $d\Sigma^\alpha$; умножая $\mathbf{S}^\alpha$ (8.7) на $\mathfrak{Э}^\beta$ и учитывая (8.7), получим выражение компонент $S^{\alpha\beta}$ через основные векторы истинных напряжений и единичный базис $\mathbf{k}^\beta$:

$$S^{\alpha\beta} = \sqrt{g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta}}\, \mathbf{P}^{(\alpha)}\, \mathbf{k}^\beta,\quad \mathbf{k}^\beta = \frac{\mathfrak{Э}^\beta}{|\mathfrak{Э}^\beta|}.$$

Из симметрии $S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$ находим закон взаимности

$$\mathbf{P}^{(\alpha)}\, \mathbf{k}^\beta = \mathbf{P}^{(\beta)}\, \mathbf{k}^\alpha: \tag{8.17}$$

проекция $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ на направление $\mathfrak{Э}^\beta$ равна проекции $\mathbf{P}^{(\beta)}$ на направление $\mathfrak{Э}^\alpha$.

С помощью метрического тензора $\tilde{g}$ и аффинора $\tilde{A}$ тензор напряжений $\tilde{S}$ можно представить в репере $\mathfrak{Э}^i$ другими компонентами, как, например, ковариантными и смешанными:

$$S_{ij} = S^{mn} g_{im} g_{nj} = S^{m}_{\cdot j}\, g_{im} = S_{i\cdot}^{\ m}\, g_{mj}, \tag{8.18}$$

причем вектор напряжений $\mathbf{P}^{(\nu)}$ согласно (8.8) при замене $\mathfrak{Э}_j = \mathfrak{Э}^m g_{mj}$ и $\nu_i = \nu^n g_{in}$ получит выражения

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = S_{mn} \nu^n \mathfrak{Э}^m = S^{ij} \nu_j \mathfrak{Э}_i. \tag{8.19}$$

Тензор $\tilde{S}$ можно представить и в других реперах. Однако напряжение можно представить и другими матрицами, не являющимися собственно тензорами. Приведем две из них.

Напряжения, отнесенные к недеформированным площадкам. Пусть начальная элементарная вектор-площадка $d\mathring{\mathbf{\Sigma}}=d\mathring{\Sigma}\mathbf{n}$ с единичным вектором нормали $\mathbf{n}=n_i\mathbf{e}_i$ в результате деформации превращается в вектор-площадку $d\mathbf{\Sigma}=d\Sigma\boldsymbol{\nu}$ с единичным вектором нормали $\boldsymbol{\nu}=\nu_i\boldsymbol{\vartheta}^i$. Тогда очевидно, что $d\mathring{\Sigma}^i$ в репере $\mathbf{e}_i$ равна $d\mathring{\Sigma}n_i$, и потому, полагая в формуле (8.2) $d\Sigma^\nu=d\Sigma$ и умножая обе части (8.2) на $\boldsymbol{\vartheta}_j$ (с учетом $\boldsymbol{\vartheta}^i\boldsymbol{\vartheta}_j=\delta^i_j$), получим

$$d\Sigma\nu_j=\sqrt{g}n_j\,d\mathring{\Sigma},\quad \frac{d\Sigma}{d\mathring{\Sigma}}\nu_j=\sqrt{g}n_j. \tag{8.20}$$

Вектор $\mathbf{t}^{(\nu)}$, определенный равенством

$$\mathbf{t}^{(\nu)}\,d\mathring{\Sigma}=\mathbf{P}^{(\nu)}\,d\Sigma=\mathbf{S}^i\nu_i\,d\Sigma, \tag{8.21}$$

называется *условным напряжением* на площадке $d\mathbf{\Sigma}$ с нормалью $\boldsymbol{\nu}$; он колинеарен $\mathbf{P}^{(\nu)}$. Заменяя из (8.20) $\nu_i d\Sigma$ на $\sqrt{g}n_i d\mathring{\Sigma}$, преобразуем (8.21) к виду

$$\mathbf{t}^{(\nu)}=\mathbf{S}^i\sqrt{g}n_i, \tag{8.21'}$$

т. е. существует вектор $\mathbf{t}^i$ такой, что, подобно (8.8).

$$\mathbf{t}^{(\nu)}=\mathbf{t}^i n_i,\ \mathbf{t}^i=\sqrt{g}\mathbf{S}^i. \tag{8.22}$$

Вектор $\mathbf{t}^i$ можно представить в начальном базисе $\mathbf{e}_i$ через его компоненты

$$\mathbf{t}^i=t^{ij}\mathbf{e}_j. \tag{8.23}$$

Формула (8.22) для $\mathbf{t}^i$ с учетом (8.9) и (8.23) принимает вид

$$\mathbf{t}^i=\sqrt{g}\,S^{il}\boldsymbol{\vartheta}_l=S^{il}\,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^l}\sqrt{g}. \tag{8.24}$$

Отсюда, заменяя $\boldsymbol{x}=x_k\mathbf{e}_k$, $\boldsymbol{\vartheta}_j=A^k_j\mathbf{e}_k$, находим связь между компонентами t^{ij} и S^{ij}:

$$t^{ij}=\sqrt{g}\,A^j_l S^{il}. \tag{8.25}$$

Псевдотензор t^{ij} вследствие определения его на основании (8.21) называется тензором *условных напряжений.*

Как видно из выражения компонент t^{ij} (8.25), матрица t^{ij} несимметричная. Связь компонент тензора условных напряжений t^{ij} с истинными векторами напряжений $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ на деформированных вектор-площадках $d\mathbf{\Sigma}^\alpha$ (при $t=t_0$ координатных $d\mathring{\mathbf{\Sigma}}^\alpha$) находится из (8.21), если нормаль $\boldsymbol{\nu}$ площадки $d\Sigma$ совмещать с направления-

ми $\mathfrak{z}^\alpha$ ($\alpha=1$, 2, 3), а нормаль $\mathbf{n}$ площадки $d\overset{\circ}{\Sigma}$ — с $\mathbf{e}_\alpha$; тогда согласно (8.21)

$$\mathbf{t}^{(\alpha)} = \mathbf{P}^{(\alpha)} \frac{d\Sigma^\alpha}{d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\alpha},$$

и потому на основании формул (8.1), (8.7)

$$\mathbf{t}^{(\alpha)} = \sqrt{gg^{\alpha\alpha}}\,\mathbf{P}^{(\alpha)} = \sqrt{g}\,\mathbf{S}^\alpha. \qquad (8.26)$$

Единичная нормаль $\mathbf{n}$ начальной площадки $d\overset{\circ}{\Sigma}{}^\alpha$ в репере $\mathbf{e}_i$ равна $\mathbf{n}_\alpha=\mathbf{e}_\alpha$; с учетом (8.22), (8.23) получаем выражения компонент $t^{\alpha\beta}$ через $\mathbf{P}^{(\alpha)}$:

$$t^{\alpha\beta} = \sqrt{gg^{\alpha\alpha}}\,\mathbf{P}^{(\alpha)}\mathbf{e}_\beta = \sqrt{g}\,\mathbf{S}^\alpha\mathbf{e}_\beta. \qquad (8.27)$$

Здесь видна несимметрия компонент по индексам (α, β); с точностью до множителя $\sqrt{gg^{\alpha\alpha}}$ на площадке с нормалью вдоль $\mathfrak{z}^\alpha$ компонента $t^{\alpha\beta}$ равна проекции вектора истинного напряжения $\mathbf{P}^{(\alpha)}$, приложенного на ней, на направление оси x_β.

Физическими компонентами тензора напряжений $\sigma_\Phi^{\alpha\beta}$ называются проекции векторов $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ по осям $\mathfrak{z}_i$. Они определяются из равенств

$$\mathbf{P}^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{3} P^{(\alpha j)}\,|\,\mathfrak{z}_j\,|\,\frac{\mathfrak{z}_j}{|\,\mathfrak{z}_j\,|} \equiv \sigma_\Phi^{\alpha j}\mathbf{k}_j, \qquad (8.28)$$

где $\mathbf{k}_j$ — единичный базис направлений $\mathfrak{z}_j$, $\mathbf{k}_\alpha=\mathfrak{z}_\alpha/|\,\mathfrak{z}_\alpha\,|$. Как следует из (8.7), физические компоненты тензора напряжений связаны с основными контравариантными компонентами напряжений S^{ij} следующим образом:

$$\sigma_\Phi^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}\sqrt{\frac{g_{\beta\beta}}{g^{\alpha\alpha}}}. \qquad (8.29)$$

Переходим к дальнейшему анализу тензора $\widetilde{S}$. Представление его в репере $\mathfrak{z}_i$ компонентами S^{ij} называется *контравариантным тензором Коши.*

В механике сплошной среды существенное значение имеет *тензор мгновенных истинных напряжений,* определенный в точке $\boldsymbol{x}$ пространства наблюдателя компонентами $\sigma_{ij}=\sigma^{ij}$ в декартовых координатах (x_i). В объеме $dV=dx_1dx_2dx_3$ (или $dx^1dx^2dx^3$) в момент t находится физическая частица — параллелепипед с координатными гранями, определяемыми вектор-нормалями $\mathbf{e}_\alpha$; при $t=t_0$ эта частица была некоторым косоугольным параллелепипедом с направлениями и размерами основных ребер $(\boldsymbol{\xi})_j$, удов-

летворяющими соотношениям (6.6)—(6.10), в которых надо заменить $\rho \to (\rho)_\alpha = dx_\alpha \mathbf{e}_\alpha$; следовательно, волокну $(\rho)_\alpha$ соответствует

$$(\xi)_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha = B_\alpha^i \mathbf{e}_i dx_\alpha, \tag{8.30}$$

координатной площадке $d\mathcal{F}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha dx_\beta dx_\gamma$ — площадка

$$d\mathring{\mathcal{F}}_\alpha = [(\xi)_\beta (\xi)_\gamma] = dx_\beta dx_\gamma \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_\beta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_\gamma}\right]. \tag{8.31}$$

Вектор истинного напряжения на физической площадке, которая в момент t совпадает с $d\mathcal{F}_\alpha$, обозначим $\mathcal{P}^{(\alpha)}$, его компоненты в репере $\mathbf{e}_i$ обозначим $\sigma_{\alpha i}$, так что

$$\mathcal{P}^{(\alpha)} = \sigma_{\alpha i}\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\sigma}^\alpha. \tag{8.32}$$

Полная сила, действующая на $d\mathcal{F}_\alpha$, равна $\mathcal{P}^{(\alpha)} d\mathcal{F}_\alpha$, где $d\mathcal{F}_\alpha = dx_\beta dx_\gamma$. Площадка $d\mathcal{F}_\alpha$ по отношению к реперу $\mathbf{э}_i$ — наклонная с нормалью $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_\alpha$, и потому вектор напряжения $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ совпадает с $\mathcal{P}^{(\nu)}$ (8.8) при $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_\alpha$. Но

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{э}^i \nu_i, \ \ \nu_i = \mathbf{э}_i \mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial \mathrm{x}^i} = A_i^\alpha,$$

следовательно,

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathcal{P}^{(\alpha)} = S^{ij} A_i^\alpha \mathbf{э}_j = S^{kj} A_k^\alpha A_j^i \mathbf{e}_i. \tag{8.33}$$

Сравнивая (8.32) и (8.33), находим выражения σ_{ij} через компоненты S^{ij}, т. е. формулы преобразования компонент $\widetilde{S}$ при переходе в точке $\boldsymbol{x}$ от репера $\mathbf{э}_j$ к декартову $\mathbf{e}_i$,

$$\sigma^{\alpha i} = \sigma_{\alpha i} = S^{mn} A_m^\alpha A_n^i. \tag{8.34}$$

Поскольку $S^{ij} = S^{ji}$, то и $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, т. е. компоненты σ_{ij} тензора мгновенных напряжений симметричны. Формулы (8.34) позволяют фактически вычислить истинные мгновенные напряжения $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$, если известен закон движения среды $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$, по которому согласно (6.7) находятся A_j^i, так как (8.34) при этом определяют $\sigma_{ij}\ (\mathbf{x}, t)$, а значит, и $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$.

Обратные соотношения получаются из (8.34), если их умножить на $B_\alpha^k B_i^l$ и просуммировать по α и i. Учитывая свойство умножения (6.8) $(B_i^k A_j^i = \delta_j^k = \delta_{kj})$, получим

$$S^{kl} = \sigma_{ij} B_i^k B_j^l. \tag{8.35}$$

При заданных $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ и законе движения в обратной форме $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{x}, t)$ из (6.10) находим

$$B_n^m = \frac{\partial x^m}{\partial x_n} = B_n^m(\boldsymbol{x}, t),$$

а следовательно, и $B_n^m(\mathbf{x}, t)$, после чего (8.35) дают $S^{kl}(\mathbf{x}, t)$.

Обозначим через $\mathbf{n}=\boldsymbol{\nu}$ единичную нормаль к некоторой площадке в точке $\boldsymbol{x}$ в момент t:

$$\mathbf{n} = n_i\mathbf{e}_i = \nu_i\boldsymbol{э}^i,\ \nu_i = \mathbf{n}\boldsymbol{э}_i = n_k A_i^k$$

и найдем выражение истинного вектора напряжений $\mathcal{P}^{(n)}$ на ней через σ_{ij}, обозначив $\mathcal{P}_n^i$ декартовы компоненты

$$\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_n^i\mathbf{e}_i. \tag{8.36}$$

Полагая в (8.8) $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}$, $\mathbf{P}^{(\nu)} = \mathcal{P}^{(n)}$, найдем

$$\mathcal{P}^{(n)}\mathbf{e}_i = n_k\mathbf{S}^i A_i^k.$$

откуда получаются простые формулы для напряжений на косых площадках:

$$\mathcal{P}_n^i = \sigma_{ij}n_j. \tag{8.37}$$

Они очевидны и из простых соображений: при $t=t_0$ координаты x^k и x^k совпадают, так как при $t = t_0$, $\boldsymbol{э}_i = \mathbf{e}_i$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, $A_n^m = \delta_n^m$, и потому из (8.34) $\sigma_{\alpha i} = S^{\alpha i}$; из (8.8) сразу находим (8.37). Отметим, что при $t=\mathrm{const}$ вообще все свойства преобразований σ_{ij}, связанные с преобразованием репера $\mathbf{e}_i$, совпадают тождественно с соответствующими свойствами при малых деформациях.

Теория напряжений в декартовых координатах одинакова для малых деформаций в лагранжевом и для любых — в эйлеровом пространстве. Если деформации малы, то $|u_{i,j}|\leqslant\delta\ll 1$, $|\varepsilon_{ij}|\ll 1$ и поэтому $g_{ij}=\delta_{ij}$, с ошибкой $\delta\ll 1$. Тензоры $S^{ij}=\sigma_{ij}$ совпадают и для напряжений на косых площадках имеют место формулы (8.36), (8.37).

Нормальное напряжение $N^{(n)}$ на косой площадке равно $\mathcal{P}^{(n)}\cdot\mathbf{n}$, т. е.

$$N^{(n)} = \mathcal{P}_n^i n_i = \sigma_{ij}n_i n_j, \tag{8.38}$$

откуда по обратному признаку тензора непосредственно следует, что σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат. Квадратичная форма

$$2\Phi_\sigma = \sigma_{ij}x_i x_j$$

с точностью до обозначений совпадает с $2\Phi_\varepsilon$ § 7, и потому очевиден ряд свойств, вытекающих из уравнения поверхности напряжений Коши $2\Phi_\sigma=\mathrm{const}$, если радиус-вектор $x=x_i\mathbf{e}_i$ направить по нормали $\mathbf{n}$ некоторой косой площадки

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{x}}{R}, \quad R = |\boldsymbol{x}|, \quad n_i = \frac{x_i}{R}.$$

Перечислим некоторые из них. Находим

$$\operatorname{grad} \Phi_\sigma = \sigma_{ij} x_j \mathbf{e}_i = R\mathcal{P}^{(n)},$$

т. е. вектор $\mathcal{P}^{(n)}$ направлен по нормали к поверхности Коши. Существуют три ортогональных главных направления тензора напряжений, и они находятся из условия $\mathcal{P}^{(n)} = \sigma\mathbf{n}$, т. е. из системы

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})\, n_j = 0,$$

а главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 — из решения кубического уравнения $|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma| = 0$, три коэффициента которого суть инварианты ортогональных преобразования базиса $\mathbf{e}_i$,

$$\sigma_{ij}\delta_{ij} = \sigma_{kk}, \quad \frac{1}{2}\left[(\sigma_{kk})^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right], \quad |\sigma_{ij}|.$$

Следовательно, инвариантами являются также

$$3\sigma = \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = S^{ij} g_{ij},$$
$$\sigma_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 =$$
$$= S^{ik} S^{jl} g_{jk} g_{il}, \qquad (8.39)$$
$$|\sigma_{ij}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Внося сюда выражения $\sigma_{ij} = \sigma^{ij}$ через S^{ij} (8.34) и используя (8.18), получим другие выражения:

$$3\sigma = S_{i}^{\cdot i} = S^{ij} g_{ij}, \quad \sigma_{ij}\sigma_{ij} = S^{i}_{\cdot j} S^{j}_{\cdot i}, \quad |\sigma_{ij}| = |S^{i}_{\cdot j}|. \qquad (8.40)$$

Напряжение $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ называется *средним гидростатическим* по следующей причине. Мысленно выделим в среде частицу, которая имеет форму правильного октаэдра, главные оси которого совпадают с главными осями тензора $\widetilde{S}$. В первом октанте его грань имеет нормаль $\mathbf{n}$, равнонаклонную к главным осям, и потому $n_i = 1/\sqrt{3}$. Нормальное напряжение на этой грани согласно (8.38) равно

$$N = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k n_k^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma \qquad (8.41)$$

(так как в главных осях касательные напряжения отсутствуют, т. е. $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Это нормальное напряжение $N = \sigma$ одинаково на всех восьми гранях октаэдра, т. е. как и в идеальных жидкостях, давление $(-\sigma)$ одинаково по всем граням; но в произ-

вольной среде на этих гранях кроме равномерного давления действует еще одинаковое по величине, но с различной ориентацией касательное напряжение τ_n, называемое *октаэдрическим напряжением.* Поскольку из (8.36) имеем на каждой грани октаэдра вектор напряжения $\mathcal{P}^{(n)}$, то

$$\tau_n = \sqrt{\mathcal{P}^{(n)^2} - N^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}.$$

Напряжение τ_n, конечно, является инвариантом, так как главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 — инварианты. Следовательно, его можно выразить через два первых инварианта группы (8.39) и записать в виде

$$\tau_n = \frac{1}{3}\sqrt{3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - (3\sigma)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2}, \qquad (8.42)$$

где через $\tilde{\sigma}_{ij}$ обозначены так называемые компоненты *девиатора напряжений* $\tilde{D}_S$:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}. \qquad (8.43)$$

Его первый инвариант равен нулю, $\tilde{\sigma}_{ij}\delta_{ij} = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3 = 0$, второй, называемый квадратом модуля девиатора напряжений, равен $\tilde{\sigma}^2$, где

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}, \qquad (8.44)$$

величины $\tau_{\alpha\beta}$ называются *главными касательными напряжениями.* Их физический смысл как экстремальных значений касательных напряжений $\sigma_{ij} (i \neq j)$ будет выяснен. Эти напряжения равны полуразностям главных напряжений:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \; \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \; \sigma_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \qquad (8.45)$$

Третий инвариант девиатора $\tilde{D}_S$ равен

$$|\tilde{\sigma}_{ij}| = \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_3,$$

где $\tilde{\sigma}_k$ — главные компоненты $\tilde{D}_S$, выражающиеся формулами (8.43):

$$\tilde{\sigma}_k = \sigma_k - \sigma, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Девиатор $\tilde{D}_S$ и его два основных инварианта σ и $\tilde{\sigma}$ играют фундаментальную роль в МСС, так как отражают наиболее существенное отличие внутренних сил любой среды от подчиняющегося закону Паскаля давления в идеальной жидкости, которая может быть определена как среда, в которой $\sigma = -p$, $\tilde{\sigma}_k \equiv 0$.

Рассмотрим в главных осях тензора напряжений $\tilde{S}$ произвольную площадку с нормалью $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_{i0}$, причем через $\mathbf{e}_{i0}$ обозначим единичный репер главных осей. Вектор силы на ней имеет компоненты (8.37), причем $\sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = \sigma_2$, $\sigma_{33} = \sigma_3$, и равен

$$\mathcal{P}_n^{(\alpha)} = \sigma_\alpha n_\alpha \mathbf{e}_{\alpha 0};$$

квадрат касательного напряжения, очевидно, равен

$$\tau^2 = \mathcal{P}^{(n)2} - N^{(n)2} = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k^2 n_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{3} \sigma_k n_k^2\right)^2, \tag{8.46}$$

причем

$$\sum_{k=1}^{3} n_k^2 = 1.$$

Напряжения σ_k в рассматриваемой точке фиксированы, и мы можем найти экстремум τ^2 по переменным n_k при указанном условии, т. е. найти соответствующие направления $\mathbf{n}$. Обозначим $n_1^2 = x$, $n_2^2 = y$, $n_3^2 = 1 - x - y$ и перепишем (8.46) в виде

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\, x + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)\, y + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)\, x + (\sigma_2 - \sigma_3)\, y + \sigma_3]^2. \tag{8.46'}$$

Условия экстремума

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial n_1} = \frac{\partial \tau^2}{\partial n_2} = 0, \quad n_1 \frac{\partial \tau^2}{\partial x} = n_2 \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0$$

дают два уравнения

$$\begin{aligned} n_1 [\sigma_1^2 - \sigma_3^2 - 2N^{(n)} (\sigma_1 - \sigma_3)] &= 0, \\ n_2 [\sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2N^{(n)} (\sigma_2 - \sigma_3)] &= 0, \end{aligned} \tag{8.47}$$

где

$$N^{(n)} = (\sigma_1 - \sigma_3)\, x + (\sigma_2 - \sigma_3)\, y + \sigma_3. \tag{8.48}$$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ величина $N^{(n)} = \sigma_3$, т. е. x, y остаются неопределенными, $\tau = \tau_{\alpha\beta} = 0$; такое состояние возможно в различных средах, но только при особенно простых внешних воздействиях. При условии

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \tag{8.49}$$

не ограничивающем общности рассмотрения, в (8.47) должны положить либо $n_1=0$, либо $n_2=0$, так как в противном случае получим противоречивые уравнения для $N^{(n)}$, если только $\sigma_1 \neq \sigma_2$. При $n_2^2=y=0$ находим из (8.47)

$$\sigma_1+\sigma_3-2[(\sigma_1-\sigma_3)x+\sigma_3]=0,$$

откуда $x=n_1^2=0{,}5$, $n_3^2=1-n_1^2=0{,}5$, т. е. искомая площадка проходит через ось $\mathbf{e}_{20}$ и расположена под углами 45° к $\mathbf{e}_{10}$ и $\mathbf{e}_{30}$. На этой площадке согласно (8.46′)

$$\tau^2=\frac{\sigma_1^2-\sigma_3^2}{2}+\sigma_3^2-\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}+\sigma_3\right)^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2,$$

т. е. $\tau=\tau_{13}$ (8.45) — наибольшее касательное напряжение в рассматриваемой точке тела. Полагая теперь $n_1^2=x=0$ и затем $n_3^2=0$, найдем, что два других экстремальных напряжения равны τ_{23}, τ_{12} (8.45) и действуют на площадках, делящих пополам углы между главными плоскостями (2, 3) и (1, 2).

Наибольшее касательное напряжение, равное $\tau_{13}=\tau_{max}$ при условии (8.9), в других случаях будет наибольшим по модулю из всех $\tau_{\alpha\beta}$ (8.45)

$$\tau_{max}=\max\tau_{\alpha\beta}. \qquad (8.50)$$

Оно определяет наибольшую силу сдвига в среде и потому может приводить к разрушениям твердых тел, изменениям режимов течения жидкостей и газов и т. п. В МСС обычно находят не только закон движения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ или $\mathbf{v}(x, t)$, но и компоненты тензора напряжений $S^{ij}(\mathbf{x}, t)$ или $\sigma_{ij}(x, t)$ и другие. Но для вычисления τ_{max} надо вычислить главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 и выбрать наибольшее из (8.45), что связано с решением и анализом корней кубического уравнения. Важным преимуществом обладает октаэдрическое напряжение τ_n (8.42) или модуль девиатора $\tilde{\sigma}$, имеющие простые выражения через σ_{ij} или $\tilde{\sigma}_{ij}$ и практически равноправные с τ_{max}. Причина такокого равноправия в первую очередь состоит в том, что с точностью до почти постоянного множителя числа τ_n и τ_{max} или $\tilde{\sigma}$ и τ_{max} равны между собой независимо от характера среды и процесса ее движения. Действительно, отношение, например, τ_n/τ_{max} определяется дробью

$$z=\frac{\tau_n}{\tau_{max}}=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{31}^2}}{\max|\tau_{\alpha\beta}|}, \qquad (8.51)$$

причем на основании выражений (8.45)

$$\tau_{12}+\tau_{23}+\tau_{31}=0.$$

Следовательно,

$$\frac{3}{2} z = \sqrt{1 + a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\max |\sigma_\alpha - \sigma_\beta|}, \quad (8.51)$$

причем $|b| < |a| < 1$, $1 + a + b = 0$; при этих условиях, как легко видеть, число z заключено в границах

$$1 \geqslant \frac{3z}{2\sqrt{2}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866, \quad (8.52)$$

и, следовательно, положив $z \approx 0{,}878$, мы можем допустить ошибку $< 7\%$. Такая же оценка справедлива для деформаций и скоростей деформаций (7.29).

Проведенный выше анализ напряжений в точке тела, не зависящих от систем координат, тождественно переносится на теорию деформаций и частично уже был сделан в § 7. Например, главные сдвиги через главные удлинения выражаются формулами (8.45), если заменить буквы σ на ε и τ на $\gamma/2$.

§ 8. 2. Напряжения и деформации в произвольных координатах

Введем криволинейную систему координат (q^i), взаимно-однозначно связанную с ортогональной декартовой системой координат (x^i или x_i):

$$q^i = q^i(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q^i); \quad (8.53)$$

базис и метрический тензор ее выражаются формулами

$$\mathbf{q}_i(q) = \partial \boldsymbol{x} / \partial q^i = C_i^m \mathbf{e}_m, \quad q_{ij}(q) = \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j, \quad (8.54)$$

$$q^{ij} q_{jm} = \delta_m^i, \quad \mathbf{q}^i = \mathbf{q}_j q^{ij}.$$

Если производные векторов базиса $\partial \mathbf{q}_i / \partial q^j$ представим, подобно (6.68), в виде

$$\partial \mathbf{q}_i / \partial q^j = \gamma_{ij}^m \mathbf{q}_m = \gamma_{ij,m} \mathbf{q}^m, \quad \gamma_{ij}^m = \gamma_{ij.k} q^{km}, \quad (8.55)$$

то получим, подобно (6.71),

$$\gamma_{ij.k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial q_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial q_{ij}}{\partial q^k} \right), \quad (8.56)$$

т. е. найдем $\gamma_{ij.k}$ и γ_{ij}^k как функции координат q^i.

Различные системы криволинейных координат бывают удобны для решения частных задач в зависимости от формы области, занятой телом. Например, для области, имеющей при любом t

форму цилиндра, ограниченного перпендикулярными оси плоскостями, удобны цилиндрические координаты:

$$q^1 = r,\ q^2 = \varphi,\ q^3 = z,\ d\boldsymbol{x}^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

для которых отличные от нуля метрические параметры равны

$$q_{11} = q_{33} = 1,\ q_{22} = r^2,$$

$$q^{11} = q^{33} = 1,\ q^{22} = 1/r^2,$$

$$\gamma_{12.2} = \gamma_{21.2} = r,\quad \gamma_{12}^2 = \gamma_{21}^2 = 1/r.$$

В § 8 введен тензор напряжений $\widetilde{S}$ с компонентами S^{ij} в криволинейных лагранжевых координатах x^i и компонентами σ_{ij}, являющимися истинными напряжениями в точке $\boldsymbol{x}$; при этом $\boldsymbol{x}$ и x связаны законом движения (5.4) или (5.5)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathrm{x}, t) = \varphi(\mathrm{x}, t),\quad \mathrm{x} = \mathrm{x}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \mathfrak{v}(\boldsymbol{x}, t).$$

Сохраним прежние обозначения для соответствующих реперов и метрических тензоров

$$\boldsymbol{э}_i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^i} = A_i^k \mathbf{e}^k,\quad g_{ij} = A_i^k A_j^k, \tag{8.57}$$

$$\boldsymbol{э}^i = B_k^i \mathbf{e}_k,\quad g^{ij} = B_k^i B_k^j$$

и $\Gamma_{ij.k}$, Γ_{ij}^k, выражающихся по формулам (6.71), (6.69) через метрический тензор g_{ij}. При этих условиях все результаты и формулы, полученные ранее, сохраняются.

Для одной и той же физической точки тензор напряжений $\widetilde{S}$ с компонентами σ^{ij} в эйлеровых декартовых координатах x^i и компонентами S^{ij} в лагранжевых координатах x^i (при $t > t_0$ являющихся криволинейными) — один и тот же физический объект. Это значит, что на одной и той же площадке с единичной нормалью $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}$, представленной в реперах $\boldsymbol{э}_i$ и $\mathbf{e}_i$,

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n},\quad \nu_i = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{э}_i\quad n_i = \mathbf{n}\mathbf{e}_i, \tag{8.58}$$

физические векторы истинных напряжений $\mathbf{P}^{(\nu)}$ (8.8) и $\mathscr{P}^{(n)}$ (8.36), (8.37) тождественны:

$$\mathscr{P}^{(n)} = \mathscr{P}_n^i \mathbf{e}_i = \sigma^{ij} n_i \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\sigma}^i n_i = \mathbf{P}^{(\nu)} = \mathbf{S}^i \nu_i = S^{ij} \nu_i \boldsymbol{э}_j. \tag{8.59}$$

Отсюда и были получены формулы (8.34), (8.35)

$$\sigma^{ij} = S^{mn} A_m^i A_n^j,\quad S^{ij} = \sigma^{mn} B_m^i B_n^j, \tag{8.60}$$

$$A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \mathrm{x}^j},\quad B_j^i = \frac{\partial \mathrm{x}^i}{\partial x^j}.$$

Все выписанные величины могут быть выражены как через $\mathbf{x}$, так и через $\boldsymbol{x}$.

В рассматриваемой физической точке $(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{x}=\varphi(\mathbf{x}, t)$ в момент t новая криволинейная система координат (q^i), определяемая уравнением (8.53), имеет характеристики, даваемые формулами (8.59)—(8.56); причем сами координаты q^i имеют значения

$$q^i = q^i(\boldsymbol{x}) = q^i(\varphi(\mathbf{x}, t)). \tag{8.61}$$

Направление нормали к координатной площадке, построенной на векторах $(d\boldsymbol{x})_\alpha = \mathbf{q}_\alpha dq^\alpha$ и $(d\boldsymbol{x})_\beta = \mathbf{q}_\beta dq^\beta$, определяется единичной нормалью $(\boldsymbol{\lambda})_\gamma$:

$$(\boldsymbol{\lambda})_\gamma = \frac{\mathbf{q}^\gamma}{|\mathbf{q}^\gamma|} = \frac{\mathbf{q}^\gamma}{\sqrt{q^{\gamma\gamma}}}.$$

Все рассуждения начала § 8 относительно представления тензора напряжений $\widetilde{S}$ на косой площадке с единичной нормалью $\boldsymbol{\nu}$, которую теперь обозначим $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}, \tag{8.62}$$

можно повторить, но компоненты $\widetilde{S}$ в репере $\mathbf{q}_i$ будут отличны от S^{ij}, $\sigma^{ij}=\sigma_{ij}$ и других введенных в § 8; обозначим контравариантные *компоненты тензора* $\widetilde{S}$ *в репере* $\mathbf{q}_i$ *через* Q^{ij}. Тогда формулы (8.8), (8.9) для вектора истинного напряжения на площадке с нормалью $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\lambda}$ перепишутся в виде

$$\mathcal{P}^{(\lambda)} = \mathbf{Q}^i\lambda_i, \quad \mathbf{Q}^i = Q^{ij}\mathbf{q}_j, \text{ причем } \lambda_i = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{q}_i. \tag{8.63}$$

Заметим, что при $\mathbf{n}=\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\lambda}$ ковариантные компоненты их в реперах $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{э}_i$, $\mathbf{q}_i$, обозначаемые n_i, ν_i и λ_i, различны, почему и приходится одну и ту же единичную нормаль обозначать различными буквами. Это относится ко всем векторным и тензорным величинам. После приобретения навыков при расчетах и выкладках необходимость различных обозначений отпадает.

Физический смысл компонент $\mathbf{Q}^i$ и Q^{ij} тензора $\widetilde{S}$ устанавливается формулами (8.63), так как $\mathcal{P}^{(\lambda)}$ — физическая величина, обозначающая вектор истинного напряжения на единичной физической площадке с единичной нормалью $\boldsymbol{\lambda}$. Для одной и той же косой площадки, т. е. при условии (8.62), вектор $\mathcal{P}^{(\lambda)}$ равен векторам $\mathbf{P}^{(\nu)}$ (8.8) и $\mathcal{P}^{(n)}$ (8.37), $\mathcal{P}^{(\lambda)} = \mathbf{P}^{(\nu)} = \mathcal{P}^{(n)}$, т. е.

$$\mathcal{P}^{(\lambda)} = \mathbf{Q}^i\lambda_i = Q^{ij}\lambda_i\mathbf{q}_j = \mathbf{S}^i\nu_i = S^{ij}\nu_i\mathbf{э}_j = \sigma^{ij}n_i\mathbf{e}_j = \boldsymbol{\sigma}^i n_i, \tag{8.64}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^i \equiv \boldsymbol{\sigma}_i$. Эти соотношения и есть основа для преобразования координатных векторов $(\mathbf{Q}^i, \mathbf{S}^i, \boldsymbol{\sigma}^i)$ и компонент одного и того же

тензора напряжений $\widetilde{S}$ при переходе от одной координатной системы к другой.

Если какой-нибудь другой тензор $\widetilde{z}$ обладает свойствами, аналогичными $\widetilde{S}$ (т. е. для заданного в некоторой точке направления внутри среды ($\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\nu}=\mathbf{n}$) в трех рассматриваемых системах координат характеризует вектор $\mathbf{z}^{(\nu)}=\mathbf{z}^{(\lambda)}=\mathbf{z}^{(n)}$, который, например, в системе координат q^i имеет выражение $\mathbf{z}^{(\lambda)}=\mathbf{z}^i\lambda_i$, $\mathbf{z}^i=z^{ij}\mathbf{q}_j$, где z^{ij} не зависят от направления λ), то для компонент тензора $\widetilde{z}$ будут справедливы соотношения (8.64) при замене $\mathcal{P}\to z, Q^{ij}\to z^{ij}$, $\mathbf{Q}^i\to\mathbf{z}^i$ и т. д. и при соответствующих обозначениях компонент $\widetilde{z}$ в реперах $\boldsymbol{э}_i$ и $\mathbf{e}_i$.

Чтобы найти выражение вектора $\boldsymbol{\sigma}^i$ и компонент σ^{ij} через $\mathbf{S}^i$, S^{ij} и $\mathbf{Q}^i$, Q^{ij}, направим нормаль $\mathbf{n}=\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\lambda}$ по координатному вектору $\mathbf{e}^\alpha=$ $=[\mathbf{e}_\beta,\mathbf{e}_\gamma]=\mathbf{e}_\alpha$ репера $(\mathbf{e}_i)$, т. е. положим $(\mathbf{n})^\alpha=\mathbf{e}^\alpha=\mathbf{e}_\alpha$; получим

$$n_i=(\mathbf{n})^\alpha\mathbf{e}_i=\delta_i^\alpha,\ \ \nu_i=(\mathbf{n})^\alpha\boldsymbol{э}_i=\partial x^\alpha/\partial \mathrm{x}^i;\ \ \lambda_i=(\mathbf{n})^\alpha\mathbf{q}_i=\partial x^\alpha/\partial q^i,$$

получим из (8.63), (8.64)

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha=A_i^\alpha\mathbf{S}^i=C_i^\alpha\mathbf{Q}^i, \tag{8.65}$$

и потому

$$\sigma^{kl}=A_i^k A_j^l S^{ij}=C_i^k C_j^l Q^{ij}, \tag{8.66}$$

причем $A_i^j(\mathbf{x},t)$, $S^{ij}(\mathbf{x},t)$ можно выразить в виде функций от $(\boldsymbol{x},t)$, а $C_i^j(q)$, $Q^{ij}(q)$ согласно (8.53) — в виде функций $(\mathbf{x})$. Формулы (8.66) дают искомое выражение.

Чтобы найти выражение Q^{ij} через σ_{ij} и S^{ij}, а также S^{ij} через σ^{ij} и Q^{ij}, вводятся обратные относительно A_j^i и C_j^i матрицы

$$A_j^i B_i^k=\delta_j^k,\quad C_j^i D_i^k=\delta_j^k,$$

определяемые этими уравнениями. Умножая (8.66) на $D_k^m D_l^n$, получим

$$Q^{mn}=\sigma^{kl}D_k^m D_l^n=S^{ij}A_i^k A_j^l D_k^m D_l^n. \tag{8.67}$$

Вспомним, что закон движения частицы (5.5) задает еще базис $\partial\mathbf{x}/\partial x^i$, определяемый аффинором $\widetilde{B}=\partial\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{x}$, обратным $\widetilde{A}$ (§ 6), который теперь обозначим $\boldsymbol{\epsilon}_i$:

$$\boldsymbol{\epsilon}_i=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x^i}=B_i^k\mathbf{e}_k,\ \ B_i^k=\frac{\partial \mathrm{x}^k}{\partial x_i},\ \ \boldsymbol{\epsilon}_i A_l^i=\boldsymbol{э}^i A_j^l. \tag{8.68}$$

Соответствующий ему метрический тензор G_{ij} и контравариантные базис $\boldsymbol{\epsilon}^i$ и тензор G^{ij}, а также символы Кристофеля $\mathcal{T}$ определяются соотношениями

$$G_{ij} = \boldsymbol{\epsilon}_i \boldsymbol{\epsilon}_j = B_i^k B_j^k, \quad G^{ij} G_{jk} = \delta_k^i,$$
$$\boldsymbol{\epsilon}^i = A_m^i \mathbf{e}_m, \quad G^{ij} = \boldsymbol{\epsilon}^i \boldsymbol{\epsilon}^j = A_m^i A_m^j, \tag{8.69}$$
$$\mathcal{T}_{ij.k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial G_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Тензор напряжений $\widetilde{S}$ мы можем представить, конечно, и в базисе $\boldsymbol{\epsilon}^i$, обозначив его компоненты через Σ^i, Σ^{ij}, вектор напряжения на площадке с единичной нормалью $\boldsymbol{\varkappa}$ — через $\mathcal{P}^{(\varkappa)}$, так что

$$\mathcal{P}^{(\varkappa)} = \Sigma^i \varkappa_i = \Sigma^{ij} \varkappa_i \boldsymbol{\epsilon}_j. \tag{8.70}$$

Рассматривая во всех реперах ($\mathbf{e}_i$, $\mathbf{э}_i$, $\mathbf{q}_i$, $\boldsymbol{\epsilon}_i$) одну и ту же физическую площадку с единичной нормалью $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\varkappa}$, т. е. перенеся к ней параллельно (без вращения) все эти реперы, мы получим условия (8.64), к которым присоединится еще одно

$$\sigma^i n_i = \Sigma^i \varkappa_i = \Sigma^{ij} \varkappa_i \boldsymbol{\epsilon}_j. \tag{8.71}$$

Совместим $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{n} = \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda}$ с единичным вектором нормали к площадке, образованной векторами $\boldsymbol{\epsilon}_\beta$, $\boldsymbol{\epsilon}_\gamma$, т. е. положим

$$\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\epsilon}^\alpha / \sqrt{G^{\alpha\alpha}},$$

тогда

$$n_i = \boldsymbol{\varkappa}\,\mathbf{e}_i = A_i^\alpha / \sqrt{G^{\alpha\alpha}}, \quad \varkappa_i = \boldsymbol{\varkappa}\,\boldsymbol{\epsilon}_i = \delta_i^\alpha / \sqrt{G^{\alpha\alpha}};$$

из (8.71) получим

$$\sigma^{ij} A_i^\alpha \mathbf{e}_j = \Sigma^{\alpha j} \boldsymbol{\epsilon}_j.$$

Отсюда, умножая на $\boldsymbol{\epsilon}^\beta$, учитывая (8.69), найдем

$$\Sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{ij} A_i^\alpha A_j^\beta. \tag{8.72}$$

Тензор деформаций $\widetilde{\mathcal{E}}$ до сих пор был представлен только компонентами ε_{ij}, которые выражаются формулами (6.64) через вектор перемещения $\mathbf{u} = \boldsymbol{x} - \mathbf{x}$, причем использованы декартовы компоненты $u_i(\mathbf{x}, t)$, или, что то же, $u^i(\mathbf{x}, t)$:

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{x}^j} + \frac{\partial u_j}{\partial \mathrm{x}^i} + \frac{\partial u_k}{\partial \mathrm{x}^i}\frac{\partial u_k}{\partial \mathrm{x}^j}. \tag{8.73}$$

Вектор-волокно $d\mathbf{x}$ можно представить через его компоненты в любой из трех рассмотренных выше систем координат x^i, x^i и q^i, так как все они связаны с законом движения и преобразованием (8.53):

$$\xi = d\mathrm{x} = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}^i} d\mathrm{x}^i = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial q^i} dq^i =$$
$$= \mathbf{e}_i d\mathrm{x}^i = \boldsymbol{\epsilon}_i dx^i = \boldsymbol{\epsilon}_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} dq^i \equiv \boldsymbol{\epsilon}_k C_i^k dq^i.$$

Аналогично,

$$\rho = d\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^i} d\mathrm{x}^i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^i} dx^i =$$
$$= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q^i} dq^i = э_i d\mathrm{x}^i = \mathbf{e}_i dx^i = \mathbf{q}_i dq^i.$$

Составляя разность $d\boldsymbol{x}^2 - d\mathbf{x}^2 = \rho^2 - \xi^2$, получим

$$\rho^2 - \xi^2 = 2\varepsilon_{ij} d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j = 2E_{ij} dx^i dx^j = 2\eta_{ij} dq^i dq^j,$$
$$\varepsilon_{ij} = E_{mn} A_i^m A_j^n, \tag{8.74}$$

где обозначены компоненты тензора деформации $\widetilde{\mathscr{E}}$ в различных системах координат:

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij} \text{ в } \mathbf{x},$$
$$2E_{ij} = \delta_{ij} - G_{ij} \text{ в } \boldsymbol{x},$$
$$2\eta_{ij} = q_{ij} - G_{mn} C_i^m C_j^n \text{ в } q(\boldsymbol{x}). \tag{8.75}$$

Все эти компоненты обращаются в нуль при $t=t_0$, так как согласно начальному условию $t=t_0$, $\boldsymbol{x}=\mathbf{x}$, и потому $g_{ij}=G_{ij}=\delta_{ij}$, а на основании (8.54) $C_i^k C_j^k = q_{ij}$.

Перемещение точки $\mathbf{x}$ в момент t

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x} = \mathbf{U}(q, t) \tag{8.76'}$$

можно представить через декартовы компоненты $\mathring{\mathbf{u}}^i(\boldsymbol{x}, t)$ и компоненты $U^i(q, t)$ в репере $\mathbf{q}_i$:

$$\mathbf{U} = U^i \mathbf{q}_i = U_i \mathbf{q}^i = \mathring{u}^i \mathbf{e}_i = \mathbf{u},$$

$$\mathring{u}^i(\boldsymbol{x}, t) = u^i(\mathbf{x}(\boldsymbol{x}, t), t) = x^i - \mathfrak{v}^i(\boldsymbol{x}, t). \tag{8.76}$$

Выражения компонент тензора $\widetilde{\mathscr{E}}$ через вектор $\mathbf{U}$ подобны (8.73). Для $E_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ имеем

$$2E_{ij} = \frac{\partial \mathring{u}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathring{u}^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathring{u}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \mathring{u}^m}{\partial x^j}. \tag{8.77}$$

Компоненты U^i, U_i вектора $\mathbf{U}$ предполагаются заданными в криволинейных координатах (q^i), следовательно, выражения η_{ij} будут

связаны с дифференцированием U^i, U_i по q^i. По определению (8.74), (8.76′) находим

$$2\eta_{ij} = \mathbf{q}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^j} + \mathbf{q}_j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^j}, \qquad (8.78)$$

причем $\mathbf{U} = U^i \mathbf{q}_i = U_i \mathbf{q}^i$. Поскольку на основании (8.55)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}(U^m \mathbf{q}_m) = \frac{\partial U^m}{\partial q^i}\mathbf{q}_m + U^m \frac{\partial \mathbf{q}_m}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial U^n}{\partial q^i} + U^m \gamma^n_{mi}\right)\mathbf{q}_n,$$

то, *обозначая ковариантную производную контравариантного вектора* (U^m), точнее — контравариантной компоненты вектора $\mathbf{U}$ в базисе $\mathbf{q}_i$,

$$\nabla_i U^m \equiv \frac{\partial U^m}{\partial q^i} + U^n \gamma^m_{ni}, \qquad (8.79)$$

получим выражения частных производных вектора

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^i} = \nabla_i U^m \mathbf{q}_m. \qquad (8.80)$$

Замечательная особенность ковариантной производной (8.79) — это свойство свертки с метрическим тензором q_{ml}. Если обозначить ковариантную производную ковариантного вектора (точнее — ковариантной компоненты)

$$\nabla_i U_l = \frac{\partial U_l}{\partial q^i} - U_n \gamma^n_{il}, \qquad (8.81)$$

то

$$q_{ml} \nabla_i U^m = \nabla_i (U^m q_{ml}) = \nabla_i U_l, \qquad (8.82)$$
$$q^{ml} \nabla_i U_l = \nabla_i (U_l q^{ml}) = \nabla_i U^m.$$

Внося (8.80) в (8.78), получим искомые выражения компонент тензора деформаций $\widetilde{\mathscr{E}}$ в любых криволинейных координатах (q^i) через компоненты вектора перемещения $\mathbf{U}$ в этих же координатах:

$$2\eta_{ij} = \nabla_i U_j + \nabla_j U_i - \nabla_i U_m \nabla_j U^m, \qquad \eta_{ij} = \eta_{ji}. \qquad (8.83)$$

Если какой-нибудь контравариантный вектор, например вектор напряжения $\mathbf{Q}^m$, определен в репере $\mathbf{q}_i$ выражением $\mathbf{Q}^m = Q^{mn}\mathbf{q}_n$, то ковариантной производной его по аналогии с (8.79) называется выражение

$$\nabla_i \mathbf{Q}^m = \frac{\partial \mathbf{Q}^m}{\partial q^i} + \mathbf{Q}^k \gamma^m_{ik}. \qquad (8.84)$$

Внося сюда $\mathbf{Q}^m = Q^{mn}\mathbf{q}_n$, получим

$$\nabla_i \mathbf{Q}^m = \nabla_i (Q^{mn}\mathbf{q}_n) = \mathbf{q}_n \nabla_i Q^{mn}, \qquad (8.85)$$

где $\nabla_i Q^{mn}$ — ковариантная производная контравариантного тензора:

$$\nabla_i Q^{mn} = \frac{\partial Q^{mn}}{\partial q^i} + Q^{jn} \gamma_{ij}^m + Q^{mj} \gamma_{ij}^n. \tag{8.86}$$

Закон движения при $t = \text{const}$ можно рассматривать, как одно из преобразований типа (8.53), причем компоненты σ^i, σ^{ij} тензора $\widetilde{S}$ в ортогональном репере $\mathbf{e}_i$ в точке $\boldsymbol{x}$ преобразуются в $\mathbf{S}^i$, S^{ij} в репере $\mathbf{Э}_i$, имеющем характеристики g_{ij}, Γ_{ij}^k. Заменяя q^i на x^i, $\mathbf{q}_i$ на $\mathbf{Э}_i$, q_{ij} на g_{ij}, γ на Γ и считая U^i, U_i компонентами вектора $\mathbf{U}$ в репере $\mathbf{Э}_i$:

$$\mathbf{U} = U^i(\mathrm{x}, t)\, \mathbf{Э}_i = U_i(\mathrm{x}, t)\, \mathbf{Э}^i, \tag{8.87}$$

получим выражение компонент η_{ij} тензора деформаций $\widetilde{\mathcal{E}}$ в виде (8.83) и выражения ковариантных производных компонент $\mathbf{S}^i$, S^{ij} тензора напряжений $\widetilde{S}$ в репере $\mathbf{Э}_i$ по криволинейным координатам x^i:

$$\nabla_i \mathbf{S}^m = \frac{\partial \mathbf{S}^m}{\partial \mathrm{x}^i} + \mathbf{S}^k \Gamma_{ik}^m = \mathbf{Э}_n \nabla_i S^{mn}, \tag{8.88}$$

$$\nabla_i S^{mn} = \frac{\partial S^{mn}}{\partial \mathrm{x}^i} + S^{jn} \Gamma_{ij}^m + S^{mj} \Gamma_{ij}^n.$$

§ 9. Процессы деформации и нагружения

Компоненты $v^i(\boldsymbol{x}, t)$, или $v_i(\boldsymbol{x}, t)$, вектора скорости частицы $\mathbf{v}$ в эйлеровом пространстве в декартовых координатах x^i и компоненты v_{ij} тензора скорости деформаций $\widetilde{V}$ (§ 6, 7) имеют выражения

$$2v_{ij} = \partial v_i/\partial x^j + \partial v_j/\partial x^i, \tag{9.1}$$

а вектор ускорения имеет выражение

$$\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt = \partial \mathbf{v}/dt + v^i\, \partial \mathbf{v}/\partial x^i. \tag{9.2}$$

Репер $\mathbf{q}_i$ неподвижен в точке $\boldsymbol{x} = \text{const}$ пространства наблюдателя, так как $\boldsymbol{x} = \psi(q)$, но вектор скорости $\mathbf{v} = \mathbf{V}$ в силу закона движения $\boldsymbol{x} = \varphi(\mathrm{x}, t)$ меняется по t. Для частицы $\mathrm{x} = \text{const}$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}(\mathrm{x}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{V}(q, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q^i},$$

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t) = v^i \mathbf{e}_i = V^i(q, t)\, \mathbf{q}_i(q) = V_i(q, t)\, \mathbf{q}^i(q), \tag{9.3}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \dot{q}^i = \mathbf{q}_i \dot{q}^i, \quad \dot{q}^i = V^i.$$

Следовательно,

$$\mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial t}(V^m \mathbf{q}_m) + (V^i \nabla_i V^m)\, \mathbf{q}_m$$

или окончательно получаем выражение ускорения в точке $\mathbf{x}=\text{const}$ в криволинейных координатах (q^1):

$$\mathbf{w}(q, t) = \left(\frac{\partial V^i}{\partial t} + V^j \nabla_j V^i\right) \mathbf{q}_i. \tag{9.4}$$

Пусть теперь $\mathbf{v}=\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ — вектор ускорения имеют компоненты V^i, w^i в базисе $\mathfrak{Э}_i$ лагранжевых координат $(\mathbf{x})$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial x}{\partial t} = v^i(x, t)\mathbf{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial t}\mathbf{e}_i = \mathbf{V} = V^i(\mathbf{x}, t)\,\mathfrak{Э}_i(\mathbf{x}, t) = $$
$$= V_i(\mathbf{x}, t)\,\mathfrak{Э}^i(\mathbf{x}, t);$$
$$\mathbf{w} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial v^i}{\partial t}\mathbf{e}_i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}\mathbf{e}_i = w^i(\mathbf{x}, t)\,\mathfrak{Э}_i(\mathbf{x}, t) = w_i(\mathbf{x}, t)\,\mathfrak{Э}^i(\mathbf{x}, t); \tag{9.5}$$
$$V_i = \mathbf{V}\mathfrak{Э}_i = \frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}^i} = \frac{\partial x^m}{\partial t}\,\frac{\partial x^m}{\partial \mathbf{x}^i},\quad V^i = V_j g^{ij}.$$

Найдем выражение ускорения через скорости V_i, V^i; отличие от предыдущего состоит в том, что базис $\mathbf{q}_i$ был неподвижным в пространстве наблюдателя, базис же $\mathfrak{Э}_i$ подвижный. Находим

$$\mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial t}\left(V^i(\mathbf{x}, t)\,\frac{\partial x(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^i}\right) = \frac{\partial V^i}{\partial t}\,\mathfrak{Э}_i + V^i\,\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^i} =$$
$$= \frac{\partial V^i}{\partial t}\,\mathfrak{Э}_i + V^i\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}(V^k\mathfrak{Э}_k)$$

и, следовательно, имеем выражение

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial t} + V^n\nabla_n V^i\right)\mathfrak{Э}_i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}\,\mathbf{e}_i,$$
$$w^i = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^n\Delta_n V^i = \frac{\partial^2 x^m}{\partial t^2}\,\mathbf{e}_m\mathfrak{Э}^i = \frac{\partial^2 x^m}{\partial t^2}\,\frac{\partial x^m}{\partial \mathbf{x}^k}\,g^{ik}, \tag{9.6}$$

которое совпадает с (9.4) при замене $\mathbf{q}_i$ на $\mathfrak{Э}_i$ и γ_{ij}^k на Γ_{ij}^k.

Найдем производную по времени от тензора деформации $\widetilde{\mathcal{E}}$, выраженного компонентами деформации ε_{ij}:

$$2\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = g_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial x(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^i}\,\frac{\partial x(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^j} - \delta_{ij}. \tag{9.7}$$

Получим для фиксированной частицы $\mathbf{x} = \text{const}$ в репере $\mathfrak{Э}_i$

$$2\,\frac{\partial\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathfrak{Э}_i\,\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^j} + \mathfrak{Э}_j\,\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^i} = \mathfrak{Э}_i\,\mathfrak{Э}^k\nabla_j V_k + \mathfrak{Э}_j\mathfrak{Э}^k\nabla_i V_k =$$
$$= \nabla_j V_i + \nabla_i V_j.$$

или в репере $\mathbf{e}_i$

$$2\frac{\partial \varepsilon_{ij}(\mathrm{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^i}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathrm{x}^j} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^j}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathrm{x}^i}.$$

Рассматривая здесь $\mathbf{v}$ представленным в репере $\mathbf{e}_i$ как функцию $(\boldsymbol{x}, t)$ на основании закона движения $\boldsymbol{x}=\varphi(\mathrm{x}, t)$, $\mathrm{x}=\mathfrak{v}(\boldsymbol{x}, t)$, т. е. полагая $\mathbf{v}=v^m(\boldsymbol{x}, t)\mathbf{e}_m$, получим

$$2\frac{\partial \varepsilon_{ij}(\mathrm{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^i}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial \mathrm{x}^j} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^j}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial \mathrm{x}^i} =$$

$$= \frac{\partial v^m}{\partial x^k}(A_i^m A_j^k + A_j^m A_i^k) = (v_{mk} + \omega_{mk})(A_i^m A_j^k + A_j^m A_i^k), \tag{9.8}$$

где ω_{mk} — компоненты вихря. Вследствие симметрии $v_{mk}=v_{km}$ и антисимметрии $\omega_{mk}=-\omega_{km}$ получим

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = v_{mk} A_i^k A_j^m. \tag{9.9}$$

Но согласно (8.60) правая часть этого равенства представляет преобразование декартовых компонент v_{mk} тензора $\widetilde{V}$ к компонентам в лагранжевых координатах; обозначая эти компоненты V_{ij}, получаем

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}(\mathrm{x}, t)}{\partial t} = v^{mk} A_i^k A_j^m = V^{ln} A_l^m A_n^k A_i^k A_j^m = V^{ln} g_{in} g_{jl} = V_{ij};$$

$$\frac{d\widetilde{\mathscr{E}}}{dt} = \widetilde{V} = \dot{\widetilde{\mathscr{E}}}. \tag{9.10}$$

Следовательно, для одной и той же частицы скорость тензора деформаций $\widetilde{\mathscr{E}}$ равна тензору скорости деформаций $\widetilde{V}$.

Тензоры деформаций $\widetilde{\mathscr{E}}$ и напряжений $\widetilde{S}$ в евклидовом пространстве движения среды образуют тензорные поля, изменяющиеся с течением времени. Тензор деформаций $\widetilde{\mathscr{E}}$ в фиксированный момент времени t в фиксированной точке x или $\boldsymbol{x}(\mathrm{x}, t)$ определяет *пространственную конфигурацию частицы*, т. е. аффинное преобразование окрестности точки $\mathrm{x}=\mathrm{const}$ за время $t-t_0$.

По определению *в окрестности точки* $\mathrm{x}=\mathrm{const}$ (иначе — для физической частицы) *задан процесс деформации*, если тензор деформации для этой точки задан в виде непрерывно дифференцируемой функции времени на интервале $[t_0, t]$:

$$\mathrm{x} = \mathrm{const}\colon\ \widetilde{\mathscr{E}} = \widetilde{\mathscr{E}}(\tau),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t. \tag{9.11}$$

При этом, например, для любого $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ определена форма параллелепипеда, в который преобразуется частица, выделенная в точке $\mathrm{x}=\mathrm{const}$ при $t=t_0$ в форме кубика, т. е. с точностью до

переносного движения определена вся *эволюция его граней, являющихся в МСС непроницаемыми для внутренних точек стенками.* В различных частных движениях среды реализуются различные функции (9.11), и в рассматриваемом классе непрерывно дифференцируемых по τ на них не накладывается ограничений. В отличие от этого, тензор $\tilde{\mathcal{E}}$ не может быть произвольной функцией координат **x**, так как он либо выражается через один вектор перемещения, либо удовлетворяет уравнениям совместности (§ 6, 7).

Аналогично, *в окрестности точки* $\mathbf{x}=\mathrm{const}$ *задан процесс нагружения,* если тензор напряжений для нее задан в виде непрерывно дифференцируемой функции времени

$$\mathbf{x}=\mathrm{const}:\ \tilde{S}=\tilde{S}(\tau),\quad t_0\leqslant\tau\leqslant t. \tag{9.12}$$

Тензор $\tilde{S}(\tau)$ определяет напряженность окрестности точки **x**, в частности *конфигурацию* результирующих *векторов напряжений* по граням рассмотренного параллелепипеда в момент τ, а процесс (9.12) — эволюцию этих векторов во времени на движущихся гранях.

Для одной и той же точки $\mathbf{x}=\mathrm{const}$ процессы (9.11) и (9.12) не могут быть заданы независимо в силу физических свойств вещества в окрестности этой точки. Более того, если никаких других воздействий к внутренним точкам параллелепипеда через его грани не проникает, т. е. поверхность является адиабатической оболочкой, то задание (9.11) в силу свойств вещества однозначно определяет (9.12), и наоборот (гл. III). Отсюда возникает возможность построения уравнений состояния и термодинамики сплошных сред и становится ясным значение теории процессов деформации и нагружения в окрестности точки $\mathbf{x}=\mathrm{const}$, т. е. при *однородных* (не зависящих от **x**) изменяющихся во времени деформациях и напряжениях.

Пусть $\tilde{Z}$ — какой-нибудь из симметричных тензоров $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{S}$ и других, которые могут быть построены на базе $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{S}$ (например тензор скорости деформаций $\tilde{V}$), и пусть в некоторой точке $\mathbf{x}=\mathrm{const}$ области движения среды во времени задан *процесс*

$$\mathbf{x}=\mathrm{const}:\ \tilde{Z}=\tilde{Z}(\tau),\ t_0\leqslant\tau\leqslant t, \tag{9.13}$$

который однозначно определяет в этой же точке *другой тензор* $\tilde{Y}$ и, следовательно, другой *процесс* $\tilde{Y}(\tau)$. При этих условиях значение в момент $\tau=t$ объекта $\tilde{Y}(t)$ будем называть *функционалом* процесса $\tilde{Z}(\tau)$, или оператором над процессом $\tilde{Z}(\tau)$, или отражением $\tilde{Z}(\tau)$ в $\tilde{Y}(t)$, и записывать его в одном из видов

$$\tilde{Y}(t)=\tilde{\mathcal{F}}_Y[\tilde{Z}(\tau);\ t,\ \tau]_{\tau=t_0}^{t}\equiv\tilde{Y}[\tilde{Z}(\tau)]_{t_0}^{t}\equiv\tilde{Y}(\tilde{Z}). \tag{9.14}$$

В (9.14) в скобках, содержащих тензор-аргумент $\widetilde{Z}(\tau)$, следовало бы выписать другой заданный тензорный аргумент — известный метрический тензор исходной системы координат $\widetilde{G}$ и температуру $T(\tau)$, но для простоты записи этого не делается.

В качестве независимых в МСС наиболее важны $\widetilde{Z}=\widetilde{\mathscr{E}}$ и $\widetilde{Y}=\widetilde{S}$ или наоборот; в качестве скаляров — различные инварианты тензоров $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Z}$ и термодинамические функции (энергия и др.). Время t интервала $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ в представлениях (9.11)—(9.14) — это параметр, принимающий любые значения на полубесконечном отрезке $t \geqslant t_0$. В теории термомеханических свойств различных сплошных сред задача аналитического представления функционалов (9.14) — одна из основных.

Практически все *твердые тела*, например в некотором интервале температур $T \leqslant T^*$, деформаций $|\varepsilon_{ij}| \leqslant \delta^*$ и времени $t-t_0 \leqslant t^*$, с высокой степенью точности — *упругие*, т. е. опыты показывают, что для изотермических процессов ($T=\text{const}$) значение тензора напряжения в момент t является просто аналитической функцией значения тензора деформации в этот же момент (§ 16, 17) *:

$$\widetilde{S}(t)=\widetilde{f}(\widetilde{\mathscr{E}}(t))=\left(\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\widetilde{\mathscr{E}}}\right)_0\widetilde{\mathscr{E}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial\widetilde{\mathscr{E}}^2}\right)_0\widetilde{\mathscr{E}}^2+\ldots, \quad (9.14')$$

где коэффициенты — *физические константы упругости* вещества тела.

При аналогичных условиях многие *жидкости* — *вязкие*, т. е. опыты показывают, что для любых изотермических процессов $\widetilde{S}(t)$ зависит только от $\widetilde{V}(t)$ (§ 15):

$$\widetilde{S}(t)=\widetilde{\mathscr{F}}(\widetilde{V}(t))=\Pi\cdot\widetilde{G}+\left(\frac{\partial\widetilde{\mathscr{F}}}{\partial\widetilde{V}}\right)_0\widetilde{V}+\ldots,$$

где $\widetilde{G}$ — метрический тензор системы координат, Π — некоторый инвариант, коэффициенты разложения — *физические константы вязкости* вещества жидкости. Следовательно, оператор (9.14) на основании (9.10) имеет вид

$$\widetilde{S}(t)=\widetilde{S}\,[\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)]_{t_0}^{t}=\widetilde{\mathscr{F}}\left(\frac{d\widetilde{\mathscr{E}}(t)}{dt}\right)=\Pi\widetilde{G}+\left(\frac{\partial\widetilde{\mathscr{F}}}{\partial\widetilde{V}}\right)_0\frac{d\widetilde{\mathscr{E}}}{dt}+\ldots. \quad (9.14'')$$

Однако *те же твердые и жидкие тела* при более высокой температуре, или больших деформациях и скоростях, или в большем

* Координатная запись используемых здесь операций над тензорами разъясняется ниже.

интервале времен, или при необходимости более точного отражения законом типа (9.14) физических их свойств, или при всех перечисленных условиях *обнаруживают свойства*, заметно или очень существенно *отличающиеся от описываемых* формулами (9.14′), (9.14″). Поэтому, учитывая разнообразие твердых, жидких и газообразных тел, в МСС необходимо рассматривать функционалы (9.14) весьма общего вида. Однако можно внести некоторую определенность, возникающую в связи с особенностями задач МСС и с физическими свойствами многих сред. При этом необходимо учитывать, что тензор $\widetilde{\mathscr{E}}$ почти при всех t непрерывно дифференцируемый по t и даже дважды непрерывно дифференцируемый, $\widetilde{\mathscr{E}} \in L_2$, по t.

Практически во всех случаях *функционал (9.14)* можно рассматривать *как предел функции многих переменных*: интервал $t-t_0$ разбивается на n равных отрезков $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_n = t$, берется набор значений $\widetilde{Z}_k = \widetilde{Z}(\tau_k)$ и рассматривается некоторая функция

$$\widetilde{Y}_n = \widetilde{J}(\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2, \ldots, \widetilde{Z}_n). \tag{9.15′}$$

Утверждается: для данного функционала (9.14) МСС найдется такая функция n переменных (9.15′), что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{Y}_n = \widetilde{Y}[\widetilde{Z}(\tau)]_{t_0}^{t} \tag{9.15}$$

и что функция (9.15′) при некотором n может быть аппроксимирующей для $\widetilde{Y}(\widetilde{Z})$.

Далее, *функционал* (9.14) при $\widetilde{Y} = \widetilde{S}$ и $\widetilde{Z} = \widetilde{\mathscr{E}}$ — непрерывная и даже непрерывно дифференцируемая функция параметра t.

Функционал (9.14) *имеет дифференциал Фреше*, т. е. для любых заданных $\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)$ и $\delta\widetilde{\mathscr{E}}(\tau) = \widetilde{\mathscr{E}}_1(\tau) - \widetilde{\mathscr{E}}(\tau)$ с нормой $\|\delta\widetilde{\mathscr{E}}\| \leqslant \Delta$ разность

$$\widetilde{S}[\widetilde{\mathscr{E}}_1(\tau)]_{t_0}^{t} - \widetilde{S}[\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)]_{t_0}^{t} = \delta\widetilde{S}(t)$$

отличается от линейного по $\delta\widetilde{\mathscr{E}}$ функционала на величину по норме порядка $o(\Delta)$ или меньше. Следовательно, при $\Delta \to 0$ $\delta\widetilde{S}$ представим в виде интеграла

$$\delta\widetilde{S}(t) = \int_{t_0}^{t} K_s[\widetilde{\mathscr{E}}(\xi)]_{t_0}^{\tau} \delta\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)\, d\tau, \tag{9.16}$$

где K_s — некоторый функционал $\widetilde{\mathscr{E}}(\xi)$, $t_0 \leqslant \xi \leqslant \tau$, определяемый функционалом $\widetilde{S}(\widetilde{\mathscr{E}})$.

Для *аналитических процессов деформации*, когда $\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)$ представим рядами Тейлора, например

$$\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)=\widetilde{\mathscr{E}}(t)+(\tau-t)\dot{\widetilde{\mathscr{E}}}(t)+\frac{1}{2}(\tau-t)^2\ddot{\widetilde{\mathscr{E}}}(t)+\ldots, \tag{9.17}$$

где $\dot{\widetilde{\mathscr{E}}}(t)$, $\ddot{\widetilde{\mathscr{E}}}(t)$, ... — производные $\widetilde{\mathscr{E}}$ по t, т. е. скорость $\widetilde{V}$, ускорение $\dot{\widetilde{V}}$ и т. д. в точке t, *функционал напряжения* $\widetilde{S}$ представляет универсальную для данного вещества *функцию* всех *производных* $\widetilde{\mathscr{E}}(t)$ по t:

$$\widetilde{S}(t)\equiv\widetilde{S}\,[\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)]_{t_0}^{t}=\widetilde{\Phi}(\widetilde{\mathscr{E}}(t),\ \dot{\widetilde{\mathscr{E}}}(t),\ \ddot{\widetilde{\mathscr{E}}}(t),\ \ldots), \tag{9.18}$$

причем его можно аппроксимировать функцией некоторого конечного числа производных.

Одно или некоторые из перечисленных ниже свойств функционала (9.14) являются типичными.

Оператор (9.14) имеет обратный взаимно-однозначный, т. е. из (9.14) следует существование единственного обратного оператора $\widetilde{Z}\,[\widetilde{Y}(\tau)]_{t_0}^{t}$.

Функционал $\widetilde{S}$ аналитический и может быть представлен в виде суммы многократных интегралов

$$\widetilde{S}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\mathbf{S}}_n(t),\quad \widetilde{\mathbf{S}}_n(t)=\int_{t_0}^{t}d\tau_1\int_{t_0}^{t}d\tau_2\ldots\int_{t_0}^{t}\widehat{K}_n(t,\ \tau_1,\ \ldots,\ \tau_n)\widetilde{\mathscr{E}}(\tau_1)\ldots$$
$$\ldots\widetilde{\mathscr{E}}(\tau_n)\,d\tau_n, \tag{9.19}$$

причем $\widehat{K}_n$ — некоторая матрица-функция (функция памяти) n—1 переменных τ_k, универсальная для данного вещества (может быть и обобщенной функцией). В частности, в МСС существенно используется линейный функционал (§ 21)

$$\widetilde{S}(t)=\int_{t_0}^{t}\widehat{K}_1(t,\ \tau)\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)\,d\tau. \tag{9.19'}$$

Построение конкретных видов функционалов (9.14) для различных сред представляет одну из фундаментальных проблем современной МСС. Из изложенного ясно значение алгебры и анализа тензоров $\widetilde{\mathscr{E}}$, $\widetilde{S}$. Напомним, что умножение тензора на не зависящий от него скалярный параметр дает тензор, причем во всех системах координат его компоненты умножаются на этот параметр. Формально (т. е. независимо от физического смысла операций) тензоры можно суммировать, причем компоненты суммарного тензора равны сумме соответствующих компонент в одном и том же базисе

$$(\tilde{a}+\tilde{b}=\tilde{c}; \quad a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}, \quad a^{ij}+b^{ij}=c^{ij}, \quad a^i_j+b^i_j=c^i_j).$$

В остальном алгебра будет поясняться по ходу изложения.

Операции дифференцирования и интегрирования тензора по параметру t в лагранжевом и эйлеровом пространствах являются основными в теории процессов. Пусть в движущейся фиксированной точке среды $\mathbf{x}=\text{const}$ и ее фиксированной окрестности $(\mathbf{x}+d\mathbf{x})$ даны тензор $\tilde{Z}(t)$ и зависящая от времени инвариантная квадратичная форма $\varphi_z(t)$, имеющая определенный физический смысл:

$$\varphi_z(t)=Z_{ij}d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j=z_{ij}dx^i dx^j, \tag{9.20}$$

где $Z_{ij}(\mathbf{x}, t)$ — ковариантные компоненты в лагранжевых координатах; $z_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$, или, что то же, $z^{ij}(\boldsymbol{x}, t)$, — компоненты тензора $\tilde{Z}$ в декартовом базисе $\mathbf{e}_i$ пространства наблюдателя и в силу закона движения $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\mathrm{x}, t)$, $d\boldsymbol{x}=\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^i}d\mathrm{x}^i=A^k_i\,d\mathrm{x}^i\mathbf{e}_k$. Применительно к тензору деформации $\tilde{\varepsilon}$ (9.20) является квадратом длины фиксированного начального волокна $\boldsymbol{\xi}=d\mathbf{x}$ в момент t, т. е. волокна $d\boldsymbol{x}=dx^i\mathbf{e}_i=A^i_j\,d\mathrm{x}^j\mathbf{e}_i$:

$$\varphi_\rho\equiv\boldsymbol{\rho}^2=g_{ij}d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j=\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{9.20'}$$

или

$$\varphi_\varepsilon\equiv\boldsymbol{\rho}^2-\boldsymbol{\xi}^2=2\varepsilon_{ij}dx^i dx^j=2E_{ij}d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j. \tag{9.20''}$$

Можно рассмотреть физическую площадку, нормальную к волокну $d\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}$ в момент t, т. е. к волокну $\boldsymbol{\rho}=d\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\ni}_i d\mathbf{x}^i$. Нормальное напряжение на такой площадке согласно (9.12) удовлетворяет уравнению

$$N_\rho=\sigma_{ij}n_i n_j=S^{ij}\nu_i\nu_j, \tag{9.21}$$

причем

$$\mathbf{n}=\boldsymbol{\nu}=\frac{dx}{\rho}, \quad \rho=|d\boldsymbol{x}|, \; n_i=\frac{dx^i}{\rho}, \; \nu_i=n_k A^k_i. \tag{9.21'}$$

Формулы (8.18), (8.34), (8.35) дают связь между компонентами $\tilde{S}$ в лагранжевых и эйлеровых координатах

$$\sigma_{kl}A^k_m A^l_n=S_{mn}=S^{ij}g_{mi}g_{jn}=S^{\cdot j}_{m\cdot}g_{jn}=S^{i\cdot}_{\cdot n}g_{mi}. \tag{9.22}$$

Умножая (9.21) на ρ^2, получим (9.20) для $\tilde{Z}=\tilde{S}$:

$$\varphi_s\equiv\rho^2 N_\rho=\sigma_{ij}dx^i dx^j=S_{ij}d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j, \tag{9.23}$$

причем последнее равенство и непосредственно получается из (9.22) умножением на $d\mathrm{x}^m d\mathrm{x}^n$.

Формулы (9.22) верны для любого симметричного тензора $\widetilde{Z}$ в координатах (x) и ($\boldsymbol{x}$):

$$z_{ij}A^i_m A^j_n = Z_{mn} = Z^{ij}g_{mi}g_{jn} = Z^{\cdot j}_{m\cdot}\, g_{jn} = Z^{i\cdot}_{\cdot n}\, g_{mi}. \tag{9.24}$$

В (9.20), (9.24) z_{ij} даны как функции $\boldsymbol{x}$, t; Z_{mn}, Z^{ij}, $Z^{i\cdot}_{\cdot n}$, $Z^{\cdot j}_{m\cdot}$ — как функции $\mathbf{x}$, t.

Дифференцируя скаляр $\varphi_z(t)$, (9.20) по t, получим снова скаляр $\dot{\varphi}_z(t)$, т. е. скорость

$$\dot{\varphi}_z(t) = \frac{dZ_{ij}}{dt}\, d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j \equiv \dot{Z}_{ij} d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j. \tag{9.25}$$

Следовательно, по обратному признаку $\dot{Z}_{ij}$ — *ковариантная компонента* J_{ij} *некоторого тензора* $\widetilde{J}$, называемого *тензором скорости тензора* $\widetilde{Z}$:

$$\widetilde{J} = \dot{\widetilde{Z}}, \quad J_{ij} = \dot{Z}_{ij} \equiv \mathring{Z}_{ij}. \tag{9.26}$$

Обозначая y_{ij} компоненты $\widetilde{J}$ в декартовых координатах пространства наблюдателя, в соответствии с (9.20) скаляр $\varphi_y(t) = \dot{\varphi}_z(t)$ можем записать в двух видах:

$$\varphi_y = J_{ij} d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j \equiv y_{ij} dx^i dx^j. \tag{9.27}$$

Выражения компонент y_{ij} получаем непосредственно путем дифференцирования по t при $\mathbf{x} = \mathrm{const}$ скаляра (9.20)

$$\varphi_z(t) = z_{ij} dx^i dx^j,$$

в котором

$$z_{ij} = z_{ij}(\boldsymbol{x}, t), \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \mathrm{x}^k} d\mathrm{x}^k,$$

обозначая по-прежнему через $v^k = v_k$ декартовы компоненты вектора скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, имеем

$$\frac{dz_{ij}}{dt} = \frac{\partial z_{ij}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial z_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv \frac{\partial z_{ij}}{\partial t} + v^k \frac{\partial z_{ij}}{\partial x^k},$$

$$\frac{d}{dt}(dx^i) = \frac{\partial v^i}{\partial \mathrm{x}^k} d\mathrm{x}^k = \frac{\partial v^i}{\partial x^m} dx^m.$$

Следовательно,

$$\varphi_y = \dot{\varphi}_z = \frac{dz_{ij}}{dt} dx^i dx^j + z_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial x^m} dx^m dx^j + z_{ij}\frac{\partial v^j}{\partial x^m} dx^m dx^i \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{dz_{ij}}{dt} + z_{im}\frac{\partial v^m}{\partial x^j} + z_{mj}\frac{\partial v^m}{\partial x^i}\right) dx^i dx^j. \tag{9.25'}$$

Сравнивая это выражение с (9.27), находим компоненты y_{ij}, которые обозначим также $\overset{\circ}{z}_{ij}$ (z_{ij} с кружочком сверху):

$$y_{ij} = \overset{\circ}{z}_{ij} = \frac{dz_{ij}}{dt} + z_{im}\frac{\partial v^m}{\partial x^j} + z_{mj}\frac{\partial v^m}{\partial x^i}; \tag{9.28}$$

очевидна симметрия: из $z_{ij}=z_{ji}$ следует $y_{ij}=y_{ji}$.

Повторное дифференцирование по времени t скаляра (9.20) приводит к тензорам, являющимися соответствующими производными тензора $\widetilde{Z}$. Например,

$$\ddot{\varphi}_z = \ddot{Z}_{ij}dx^i dx^j = \dot{J}_{ij}dx^i dx^j = \overset{\circ}{y}_{ij}dx^i x^j, \tag{9.29}$$

причем $\ddot{Z}_{ij}$ являются ковариантными компонентами и тензора ускорения $\dot{\widetilde{J}}=\ddot{\widetilde{Z}}$ в лагранжевых координатах, а компоненты $\overset{\circ}{y}_{ij}$ находятся при замене букв в (9.28) z_{ij} на y_{ij} и подстановке в полученное выражение вместо y_{ij} их выражений (9.28).

Операция интегрирования выражения (9.20) по t в лагранжевых координатах приводит к тензор-интегралу тензора $\widetilde{Z}$, причем ковариантные его компоненты равны

$$\int Z_{ij}(\mathbf{x},\ t)\,dt \quad \text{при} \quad \mathbf{x} = \text{const}.$$

Представление этого тензор-интеграла в эйлеровом пространстве сложнее. Пусть дан тензор $\widetilde{J}$ его квадратичной формой φ_y (9.27) и пусть для определенности необходимо построить тензор-интеграл от $\widetilde{J}$, обращающийся в ноль при $t=t_0$. Интегрируя (9.27) и учитывая (9.26), получим

$$\int_{t_0}^{t} \varphi_y(\tau)\,d\tau = dx^i dx^j \int_{t_0}^{t} J_{ij}(\mathbf{x},\ \tau)\,d\tau = Z_{ij}(\mathbf{x},\ t)\,dx^i dx^j = \widetilde{y}_{ij}dx^i dx^j, \tag{9.30}$$

причем $Z_{ij}(\mathbf{x},\ t_0)=0$; $\widetilde{y}_{ij}$ обозначены компоненты в эйлеровом пространстве. Из сравнения (9.30) с (9.20) заключим, что

$$\widetilde{y}_{ij} = z_{ij} \tag{9.31}$$

и $z_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ определяются по заданным $\mathbf{v}(\boldsymbol{x},\ t)$ и $y_{ij}(\boldsymbol{x},\ t)$ линейными дифференциальными уравнениями (9.28) и начальными условиями ($i,\ j=1,\ 2,\ 3$)

$$t = t_0, \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{x}, \quad z_{ij}(\boldsymbol{x},\ t_0) = 0, \tag{9.32}$$

т. е. компоненты $\widetilde{y}_{ij}=z_{ij}$ явно через y_{ij} не представляются. Вопрос о повторных тензор-интегралах решается аналогично.

Для квадрата длины волокна $\varphi_\rho = \rho^2$ (9.20′) компоненты тензора $\tilde{Z}$ представляют собой ковариантные компоненты метрического тензора в лагранжевых координатах $Z_{ij} = g_{ij} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$ и $z_{ij} = \delta_{ij}$ — в декартовых эйлеровых. Из (9.28), (9.10), (9.27) находим

$$y_{ij} \equiv \overset{\circ}{\delta}_{ij} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} = 2v_{ij}(\boldsymbol{x}, t),$$

$$J_{ij} \equiv \dot{g}_{ij} = \frac{\partial g_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 2\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = 2V_{ij}(\mathbf{x}, t),$$

$$\varphi_y \equiv \dot{\varphi}_\rho \equiv 2\rho\dot{\rho} = \dot{g}_{ij}\, d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j = 2v_{ij} dx^i dx^j. \tag{9.33}$$

Этот тензор скорости деформации $\tilde{V} = \dot{\tilde{\mathcal{E}}}$ с компонентами $V_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $v_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ и другими, связанными согласно (9.24) соотношениями

$$v_{ij} A^i_m A^j_n = V_{mn} = V^{ij} g_{mi} g_{jn} = V^{\cdot j}_{m\cdot} g_{jn} = V^{i\cdot}_{\cdot n} g_{im}, \tag{9.34}$$

используется в дальнейшем.

Аналогичный вывод получим для тензора скорости напряжения $\dot{\tilde{S}}$ на основании формулы (9.23):

$$\dot{\varphi}_s = \dot{S}_{ij} d\mathrm{x}^i d\mathrm{x}^j = \overset{\circ}{\sigma}_{ij} dx^i dx^j; \quad \mathrm{S}_{ij} \equiv \overset{\circ}{S}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} S_{ij}(\mathbf{x}, t);$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)}{dt} + \sigma_{im}\frac{\partial v^m}{\partial x^j} + \sigma_{jm}\frac{\partial v^m}{\partial x^i}; \tag{9.35}$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} A^i_m A^j_n = \overset{\circ}{S}_{mn} = \overset{\circ}{S}{}^{ij} g_{mi} g_{jn} = \overset{\circ}{S}{}^{\cdot j}_{m\cdot} g_{jn} = \overset{\circ}{S}{}^{i\cdot}_{\cdot n} g_{mi}.$$

Отметим, что точка сверху лагранжевых компонент тензоров означает производную по t, кружочек же — компоненты скорости тензора, получаемые поднятием и опусканием индексов с помощью метрического тензора g_{ij}, g^{ij} из ковариантных компонент.

Формулы (9.24) получаются одна из другой умножением левых и правых частей на A^p_q (например, вторая из первой — на $A^i_k A^j_l$, вторая из третьей — на A^j_l) и использования равенства

$$g^{im}(\mathbf{x}, t)\, g_{mj}(\mathbf{x}, t) = \delta^i_j.$$

Дифференцируя его по t, получим

$$\dot{g}^{ij} = -\dot{g}_{mn} g^{im} g^{jn} = -2V_{mn} g^{im} g^{jn} = -2V^{ij}. \tag{9.36}$$

Сравнивая с (9.33), (9.34), видим, что скорость контравариантной компоненты $\dot{g}^{ij}$ равна контравариантной компоненте, получаемой из скоростей ковариантных компонент путем поднятия индексов, но с обратным знаком. Отсюда следует, что скорости ковариантных $\dot{Z}_{ij}$, контравариантных $\dot{Z}^{ij}$ и смешанных компонент

$\dot{Z}^{i\cdot}_{\cdot j}$, $\dot{Z}^{\cdot i}_{j\cdot}$ тензора $\widetilde{Z}$ в лагранжевой системе координат образуют *четыре различных тензора* скорости — *ковариантный, контравариантный и два смешанных тензора скорости тензора* $\widetilde{Z}$, причем формулы (9.25) — (9.35) относятся к первому из них, получаемому дифференцированием первой формулы из группы (9.24), т. е.

$$z_{ij}A^i_m A^j_n = Z_{mn}.$$

Умножая на $B^m_k B^n_l$ вторую формулу группы (9.24), найдем

$$z_{ij} = Z^{mn}A^i_m A^j_n$$

и после дифференцирования по t с использованием (9.24) получим

$$\breve{z}_{ij} = \dot{Z}^{mn}A^i_m A^j_n; \quad \dot{Z}^{mn} = \frac{\partial Z^{mn}(\mathbf{x},\ t)}{\partial t}, \quad \breve{Z}_{mn} = \dot{Z}^{ij}g_{mi}g_{nj}\ \ldots,$$

$$\breve{z}_{ij} = \frac{dz_{ij}}{dt} - z_{im}\frac{\partial v^j}{\partial x^m} - z_{mj}\frac{\partial v^i}{\partial x^m}. \tag{9.37}$$

Птичкой «$\smile$» сверху компонент обозначены компоненты контравариантного тензора, получаемого по компонентам $\dot{Z}^{ij}$ в лагранжевых, и по компонентам $\breve{z}_{ij}$ — в эйлеровых координатах.

Дифференцируя аналогично по t третье и четвертое уравнения группы (9.24), получим два смешанных тензора скорости деформации с компонентами в лагранжевых координатах $\dot{Z}^{i\cdot}_{\cdot j} \equiv \overset{>}{Z}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ (знак $>$ сверху), $\dot{Z}^{\cdot i}_{j\cdot} \equiv \overset{<}{Z}{}^{\cdot i}_{j\cdot}$ (знак $<$ сверху) и соответственно $\overset{>}{z}_{ij}$ и $\overset{<}{z}_{ij}$ — в эйлеровых, причем

$$\overset{>}{z}_{ij} = \overset{\circ}{z}_{ij} - 2z_{im}v_{mj} = \frac{dz_{ij}}{dt} - z_{im}\frac{\partial v^j}{\partial x^m} + z_{jm}\frac{\partial v^m}{\partial x^i};$$

$$\overset{<}{z}_{ij} = \overset{\circ}{z}_{ij} - 2z_{jm}v_{mi} = \frac{dz_{ij}}{dt} + z_{im}\frac{\partial v^m}{\partial x^j} - z_{jm}\frac{\partial v^i}{\partial x^m}. \tag{9.38}$$

Четыре тензор-скорости тензора $\widetilde{Z}$, обозначенные выше

$$\overset{\circ}{\widetilde{Z}},\ \breve{\widetilde{Z}},\ \overset{>}{\widetilde{Z}},\ \overset{<}{\widetilde{Z}}, \tag{9.39}$$

линейно-зависимы алгебраически:

$$\overset{\circ}{z}_{ij} + \breve{z}_{ij} = \overset{>}{z}_{ij} + \overset{<}{z}_{ij} \quad \overset{\circ}{\widetilde{Z}} + \breve{\widetilde{Z}} = \overset{>}{\widetilde{Z}} + \overset{<}{\widetilde{Z}} \equiv 2\hat{\widetilde{Z}}, \tag{9.40}$$

причем, конечно,

$$\overset{\circ}{Z}_{ij} + \breve{Z}_{ij} = \overset{>}{Z}_{ij} + \overset{<}{Z}_{ij}, \quad \overset{\circ}{Z}{}^{ij} + \breve{Z}^{ij} = \overset{>}{Z}{}^{ij} + \overset{<}{Z}{}^{ij}, \ldots$$

и тензор (9.40) имеет компоненты в эйлеровых координатах

$$\widehat{z}_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\overset{\circ}{z}_{ij} + \breve{z}_{ij}) = \frac{dz_{ij}}{dt} + z_{im}\omega_{mj} + z_{jm}\omega_{mi}, \qquad (9.41)$$

где $\omega_{pq} = (\partial v^p/\partial x^q - \partial v^q/\partial x^p)/2$ — компоненты тензора вихря. Следовательно, в качестве алгебраически линейно-независимых имеем три симметричных тензора скорости тензора $\widetilde{Z}$: $\overset{0}{\widetilde{Z}}$, $\breve{\widetilde{Z}}$, $\widehat{\widetilde{Z}}$. Но *все они вместе с* $\widetilde{Z}$ *линейно-зависимы при заданном законе движения* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$, что следует из (9.28), (9.37), (9.40), (9.41) в эйлеровых координатах и из (9.24) — в лагранжевых. Например,

$$\dot{Z}_{mn} = \dot{Z}^{ij} g_{mi} g_{nj} + Z^{ij}(\dot{g}_{mi} g_{nj} + g_{mi}\dot{g}_{nj}),$$

или

$$\overset{\circ}{Z}_{ij} = \breve{Z}_{ij} + Z_{i\cdot}^{\cdot n}\dot{g}_{nj} + Z_{j\cdot}^{\cdot n}\dot{g}_{nj}, \qquad (9.42)$$

и два аналогичных для $\overset{>}{\widetilde{Z}}$ и $\overset{<}{\widetilde{Z}}$.

Представление одного и того же функционала связи между тензором напряжения и деформации типа (9.18) возможно с помощью любого из тензоров (9.39) и их ускорений высших порядков, т. е. выбор их определяется только простотой и удобством представления физического функционала связи для рассматриваемого вещества. В гл. V процесс $\widetilde{Z}(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{x} = \mathrm{const}$ рассматривается как траектория 9-, 6- и 5-мерного вектора в пространстве его компонент, и даются некоторые канонические представления функционала (9.14) на основе понятий длины дуги и кривизны траектории вектора.

Глава III
ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 10. Уравнения движения

Основы аксиоматики МСС изложены в § 4, причем установлено, что произвольная часть среды, заключенная в объеме V и ограниченная поверхностью Σ, в любое мгновение t находится в динамическом равновесии в смысле Даламбера: сумма всех массовых сил (включая силы инерции) и сил, действующих на поверхности Σ, равна нулю. Если плотность среды ρ, массовая сила $\mathbf{F}$ и ускорение каждой частицы $\mathbf{w}$ в момент t известны, то объемная сила, действующая на массу в объеме dV, равна $\rho(\mathbf{F}-\mathbf{w})dV$; эта сила, проинтегрированная по объему V, в сумме с проинтегрированной по поверхности Σ силой $\mathbf{P}^{(\nu)}d\Sigma$, действующей на площадку $d\Sigma$ с нормалью $\boldsymbol{\nu}$ на Σ, равна нулю. Значит, при составлении уравнения движения среду в объеме V можно считать «замороженной», т. е. считать ее абсолютно твердым телом, на внутренний единичный объем которого действует объемная сила $\rho(\mathbf{F}-\mathbf{w})$, а на поверхности — распределенный вектор силы с плотностью $\mathbf{P}^{(\nu)}$ на единицу площади. Поэтому в векторной форме *уравнение движения массы* любого объема V с соответствующей поверхностью Σ имеет вид

$$\int\limits_V \rho(\mathbf{F}-\mathbf{w})\,dV + \int\limits_\Sigma \mathbf{P}^{(\nu)}\,d\Sigma = 0 \qquad (10.1)$$

в любой системе координат. Эта система может быть криволинейной, неподвижной в пространстве наблюдателя или движущейся и деформирующейся лагранжевой, может быть вообще как угодно движущейся и деформирующейся во времени. Но если не задать метрического тензора и базиса координатной системы, а также вектора $\mathbf{P}^{(\nu)}$, то из (10.1) нельзя получить дифференциальных уравнений движения.

Для определенности рассмотрим уравнение движения среды в базисе $\mathbf{Э}_i$ лагранжевой системы координат (x^i) с метрическим тензором g_{ij} и символами Кристофеля Γ^k_{ij}. Вектор силы $\mathbf{P}^{(\nu)}$ в нем имеет выражение

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = \mathbf{S}^i \nu_i = S^{ij} \nu_i \mathbf{Э}_j, \quad \nu_i = \boldsymbol{\nu} \mathbf{Э}_i. \tag{10.2}$$

По теореме Грина — Остроградского

$$\int\limits_{\Sigma} \mathbf{S}^i \nu_i d\Sigma = \int\limits_{V} \nabla_i \mathbf{S}^i dV, \tag{10.3}$$

и потому из (10.1) получаем для любого объема V, взятого внутри области движения среды,

$$\int\limits_{V} [\rho (\mathbf{F} - \mathbf{w}) + \nabla_i \mathbf{S}^i]\, dV = 0, \tag{10.4}$$

и, следовательно, получаем дифференциальное уравнение движения в векторной форме

$$\rho (\mathbf{w} - \mathbf{F}) = \nabla_i \mathbf{S}^i = \frac{\partial \mathbf{S}^i}{\partial \mathrm{x}^i} + \mathbf{S}^n \Gamma^i_{ni}. \tag{10.5}$$

Отметим справедливую в любой криволинейной системе координат формулу Вейля ($g = |g_{ij}|$, $q = |q_{ij}|, \ldots$):

$$\delta^j_i \Gamma^i_{nj} = \Gamma^i_{ni} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \mathrm{x}^n}, \quad \delta^j_i \gamma^i_{nj} = \gamma^i_{ni} = \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{\partial \sqrt{q}}{\partial q^n}, \ldots, \tag{10.6}$$

на основании которой ковариантная производная вектора $\mathbf{S}^i$ (и любого вектора) записывается в виде

$$\nabla_i \mathbf{S}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^j} (\sqrt{g}\, \mathbf{S}^j), \quad \nabla_i \mathbf{Q}^i = \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{\partial}{\partial q^j} (\sqrt{q}\, \mathbf{Q}^j) \ldots. \tag{10.7}$$

Таким образом, уравнение движения имеет вид

$$\rho (\mathbf{w} - \mathbf{F}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^m} (\sqrt{g}\, \mathbf{S}^m) = \nabla_m \mathbf{S}^m = \operatorname{div} \tilde{S}, \tag{10.8}$$

сохраняющийся в любой криволинейной системе координат, если определитель g, производная ∇_{ni} и вектор $\mathbf{S}^m$ взяты в этой системе. Выражение, стоящее в правой части уравнения (10.8), не зависит от системы координат и представляет вектор, называемый дивергенцией тензора напряжений $\tilde{S}$.

Специфика лагранжевой криволинейной системы координат (x^i) состоит в том, что при $t = t_0$ она является декартовой, т. е. при $t = t_0$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g = |g_{ij}| = 1$ и закон сохранения массы имеет вид $\rho \sqrt{g} = \rho_0$ (§ 6, 7). В этой системе координат уравнение движения в векторной форме принимает вид

$$\rho_0 (\mathbf{w} - \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^m} (\sqrt{g}\, \mathbf{S}^m), \tag{10.9}$$

а в репере $\mathbf{e}_i$, в котором

$$\mathbf{w} = \ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{F} = X^i \mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{S}^m = S^{mn}\,\boldsymbol{\mathfrak{Э}}_n = S^{mn}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^n} = S^{mn} A^i_n \mathbf{e}_i, \tag{10.10}$$

уравнения движения имеют вид

$$\rho_0(\ddot{\boldsymbol{x}} - \mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_m}\left(A\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}_n} S^{mn}\right),$$

$$\rho_0(\ddot{x}^i - X^i) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^m}(A S^{mj} A^i_j),$$

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad \ddot{\boldsymbol{x}} = \ddot{\mathbf{u}}, \quad A^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \mathrm{x}^j} = \delta^i_j + \frac{\partial u^i}{\partial \mathrm{x}^j}, \tag{10.11}$$

причем $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор перемещения. Эти уравнения связывают между собой закон движения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$ и тензор напряжений, выраженный его компонентами $S^{ij} = S^{ji}$, так как силы $X^i(\mathbf{x}, t)$ считаются заданными, а определитель g выражается через $\mathbf{x}$:

$$A = \sqrt{g} = \sqrt{|g_{ij}|} = |A^i_j|, \quad g_{ij} = A^m_i A^m_j. \tag{10.12}$$

В эйлеровом пространстве в декартовых координатах (x^i) метрический тензор равен δ_{ij}, символы Кристофеля равны нулю, тензор напряжения $\widetilde{S}$ определяется вектором истинных напряжений $\boldsymbol{\sigma}^i = \sigma^{ij}\mathbf{e}_j$; заменяя в (10.8) $g \to 1$, $\mathbf{S}^i \to \boldsymbol{\sigma}^i$, $\mathrm{x}^m \to x^m$ и ускорение $\mathbf{w}$ на $d\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)/dt$, получим (присоединяя тождество Громеко — Лемба)

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{F}\right) \equiv \rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v^i\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} - \mathbf{F}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial x^i}, \tag{10.13}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}. \tag{10.14}$$

Если уравнения (10.8) и (10.13) написаны для одной и той же материальной точки в различных системах координат, то вектор $\operatorname{div}\widetilde{S}$ имеет одинаковые значения, т. е. имеем

$$\operatorname{div}\widetilde{S} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial x^i} = \nabla_i \mathbf{S}^i. \tag{10.15}$$

В ортогональных декартовых проекциях уравнение (10.13) дает три уравнения движения

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \rho X^i. \tag{10.16}$$

В произвольных криволинейных координатах q^i, связанных с x^i заданными соотношениями (8.53) и, значит, неподвижных в эйлеровом пространстве, уравнение движения получается из (10.8) заменой $\mathbf{э}_i \to \mathbf{q}_i$, $g_{ij} \to q_{ij}$, $g \to q = |q_{ij}|$, $\Gamma_{ij}^k \to \gamma_{ij}^k$, $\mathbf{S}^i \to \mathbf{Q}^i$, в результате чего

$$\rho \sqrt{q}(\mathbf{w} - \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial q^m}(\sqrt{q}\,\mathbf{Q}^m) \equiv \sqrt{q}\,\nabla_m \mathbf{Q}^m. \qquad (10.17)$$

Компоненты ускорения в репере $\mathbf{q}_i$ даны формулой (9.4), компоненты $\mathbf{F}$ обозначим $F^i = \mathbf{F}\mathbf{q}^i$, компоненты вектора напряжения $\mathbf{Q}^m$ определяются выражением $\mathbf{Q}^m = Q^{mn}\mathbf{q}_n$; производная

$$\nabla_m \mathbf{Q}^m = \nabla_m Q^{mn}\mathbf{q}_n,$$

$$\nabla_m Q^{mn} = \frac{\partial Q^{mn}}{\partial q^m} + Q^{mi}\gamma_{im}^n + Q^{ni}\gamma_{im}^m.$$

Умножая (10.17) на $\mathbf{q}^i$, получим уравнения

$$\rho w^i \equiv \rho\left(\frac{\partial V^i}{\partial t} + V^j \nabla_j V^i\right) = \nabla_j Q^{ij} + \rho F^i,$$

где $V^i(q, t)$ — контравариантные компоненты вектора скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{V}(q, t) = V^i \mathbf{q}_i$.

На основании уравнения движения можно получать общие теоремы о движении конечной физической массы m_g объема V_g сплошной среды и массы в фиксированном объеме V эйлерова пространства.

Умножая обе части уравнения (10.13), записанного для точки $\boldsymbol{x}$, на $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ и интегрируя по объему $V = V_g$, получим

$$\int\limits_{V_g} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int\limits_{V_g} \rho \mathbf{F} dV + \int\limits_{V_g} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial x^i} dV = \int\limits_{V_g} \rho \mathbf{F} dV + \int\limits_{\Sigma_g} \boldsymbol{\sigma}^i n_i d\Sigma, \qquad (10.18)$$

где $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$ — нормаль к поверхности Σ_g рассматриваемого объема, n_i — ее косинусы с декартовыми осями x^i, причем $\boldsymbol{\sigma}^i n_i = \mathbf{P}^{(\nu)}$ — вектор напряжения на поверхности. Учитывая возможность перехода к лагранжевой системе, на основании закона сохранения массы $\rho dV = \rho_0 \sqrt{g} dV = \rho_0 dV_0 = dm_0$ получим

$$\int\limits_{V_g} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho dV = \int\limits_{V_g^0} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho_0 dV_0 = \frac{d}{dt} \int\limits_{V_g^0} \mathbf{v} \rho_0 dV_0 = \frac{d}{dt} \int\limits_{V_g} \rho \mathbf{v} dV.$$

Следовательно, из (10.18) получаем *теорему об изменении количества движения* массы m_g:

$$\frac{dQ}{dt} = \int\limits_{V_g} \rho \mathbf{F} dV + \int\limits_{\Sigma_g} \mathbf{P}^{(\nu)} d\Sigma, \quad Q \equiv \int\limits_{V_g} \rho \mathbf{v} dV. \qquad (10.19)$$

Применительно к неподвижному объему V с поверхностью Σ в эйлеровом пространстве, заменяя в (10.18) $V_g \to V$, $\Sigma_g \to \Sigma$ и учитывая тождество

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i \mathbf{v}),$$

получим другой вид теоремы:

$$\int\limits_{\Sigma} \rho v^i n_i \mathbf{v} d\Sigma + \int\limits_{V} \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV = \int\limits_{V} \rho \mathbf{F} dV + \int\limits_{\Sigma} \mathbf{P}^{(\nu)} d\Sigma. \qquad (10.20)$$

В случае установившегося движения среды пропадает второй член левой части уравнения, и при отсутствии массовых сил ($\mathbf{F}=0$) в виде

$$\int\limits_{\Sigma} (\rho v^i n_i \mathbf{v} - \mathbf{P}^{(\nu)}) d\Sigma = 0 \qquad (10.21)$$

эта теорема имеет многочисленные приложения для оценок сил и скоростей.

Теорема о моменте количества движения получается векторным умножением (10.13) на $\boldsymbol{x} dV$ и интегрированием по V_g или V и аналогичными преобразованиями. Например, для неподвижной области V при установившемся движении при $\mathbf{F}=0$ получаем

$$\int\limits_{\Sigma} (\rho v^i n_i \mathbf{v} - \mathbf{P}^{(\nu)}) \times \boldsymbol{x} d\Sigma = 0. \qquad (10.22)$$

Следствием уравнения движения является *теорема о кинетической энергии*, называемая иногда законом сохранения механической энергии. Умножим, например, дифференциальное уравнение движения частицы (10.13) на элементарное перемещение $\delta\mathbf{u} = \mathbf{v}\delta t$ и проинтегрируем результат по объему V_g среды, ограниченному поверхностью Σ_g и состоящему из одних и тех же частиц в различные моменты времени t:

$$\int\limits_{V_g} \left[\rho (\mathbf{F} - \mathbf{w}) \mathbf{v} \delta t + \frac{\partial \sigma^i}{dx^i} \mathbf{v} \delta t \right] dV = 0. \qquad (10.23)$$

Величина $\rho \mathbf{F} \mathbf{v} \delta t = \rho \mathbf{F} \delta \mathbf{u}$ представляет работу массовых внешних сил в единице объема. Преобразуем остальные слагаемые соотношения (10.23):

$$\rho \mathbf{w} \delta \mathbf{u} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} \delta t = \frac{1}{2} \rho \delta (\mathbf{v}^2),$$

$$\mathbf{v} \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (\sigma^i \mathbf{v}) - \sigma^{ij} \frac{\partial v^j}{\partial x^i}.$$

Последнее выражение можно упростить, учитывая симметрию тензора напряжений и тождества $v_{ij}+\omega_{ij}=\partial v^i/\partial x^j$. Так как компоненты v_{ij} тензора скорости деформаций симметричны, а компоненты тензора вихря ω_{ij} антисимметричны, то $\sigma_{ij}\omega_{ij}\equiv 0$.

Скаляр, одинаковый во всех системах координат,

$$R = Q^{ij}\nabla_i V_j = Q^{ij}V_{ij} = \sigma^{ij}v_{ij} = S^{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} \tag{10.24}$$

представляет мощность (работу в единицу времени) напряжений в единице объема среды. Следовательно, на основании теоремы Остроградского — Грина имеем

$$\int_{V_g}\frac{\partial\sigma^i}{\partial x^i}\mathbf{v}\delta t dV = \int_{V_g}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sigma^i\mathbf{v})\delta t dV - \int_{V_g} R dt dV = \int_{\Sigma_g}\sigma^i n_i\mathbf{v}\delta t d\Sigma - \int_{V_g} R\delta t dV,$$

причем $\sigma^i n_i = \mathbf{P}^{(\nu)}$ —вектор внешнего напряжения на поверхности Σ, и потому $\sigma^i n_i \mathbf{v}\delta t = \mathbf{P}^{(\nu)}\ \delta\mathbf{u}$ есть работа внешней силы, приложенной на единице площади поверхности, на перемещении $\delta\mathbf{u}$ $(\mathbf{n}=\boldsymbol{\nu})$.

Из (10.23) теперь получаем

$$\int_{V_g}\frac{1}{2}\rho\delta(\mathbf{v}^2)dV + \int_{V_g} R\delta t dV = \int_{V_g}\rho\mathbf{F}\mathbf{v}\delta t dV + \int_{\Sigma_g}\mathbf{P}^{(\nu)}\mathbf{v}\delta t\delta\Sigma. \tag{10.25}$$

Учитывая, что для фиксированной в объеме V_g массы $\rho dV=\rho_0 dV_0$ область интегрирования по $\rho_0 dV_0$ при движении среды остается неизменной, знак вариации (дифференциала по времени) в первом интеграле можно вынести:

$$\int_{V_g}\frac{1}{2}\rho\delta(\mathbf{v}^2)dV = \int_{V_g^0}\frac{1}{2}\delta(\mathbf{v}^2)\rho_0 dV_0 = \delta\int_{V_g^0}\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\rho_0 dV_0 = \delta\int_{V_g}\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}dV.$$

Обозначим кинетическую энергию среды в области V_g (т. е. массы M_0) через

$$K = \int_{V_g}\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 dV, \tag{10.26}$$

работу тензора напряжений за время δt с учетом того, что $v_{ij}\delta t = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}\delta t = \delta\varepsilon_{ij}$, через

$$\delta' W = \int_{V_g} R\delta t dV = \int_{V_g} Q^{ij}V_{ij}\delta t dV = \int_{V_g} S^{ij}\delta\varepsilon_i\, dV \tag{10.27}$$

и работу внешних сил за время δt через

$$\delta'\widetilde{A} = \int\limits_{V_g} \rho \mathbf{F} \mathbf{v} \delta t dV + \int\limits_{\Sigma_g} \mathbf{P}^{(\nu)} \mathbf{v} \delta t d\Sigma. \tag{10.28}$$

Из соотношения (10.25) имеем теорему: сумма приращения кинетической энергии и работы напряжений фиксированной массы среды за время δt равна работе внешних сил на соответствующих перемещениях

$$\delta K + \delta' W = \delta' \widetilde{A}. \tag{10.29}$$

Штрихи у выражений $\delta' W$, $\delta' \widetilde{A}$ (10.27), (10.28) означают, что они не являются дифференциалами каких-то функций, хотя область интегрирования V_g в лагранжевых координатах не изменяется, например,

$$\delta' W = \int\limits_{V_g^0} \frac{1}{\rho} S^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \rho_0 dV_0 \tag{10.30}$$

Только в том случае, если существует потенциал напряжений Φ, зависящий только от деформаций ε_{ij}, так что

$$\frac{d\Phi}{dt} \delta t = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}, \quad S^{ij} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \tag{10.31}$$

величина $\delta' W$ будет дифференциалом по времени от $W(t)$, называемой потенциальной энергией тела:

$$\delta' W = \delta W, \ W = \int\limits_{V_g^0} \Phi \rho_0 dV_0 = \int\limits_{V_g} \rho \Phi dV. \tag{10.32}$$

Если при этом и внешние силы ($\mathbf{F}$, $\mathbf{P}^{(\nu)}$) имеют потенциал, так что $\delta' \widetilde{A} = \delta \widetilde{A}$, из (10.29) получается интеграл энергии:

$$K + W - \widetilde{A} = \mathrm{const}. \tag{10.33}$$

Как увидим позднее, потенциал $\Phi(\varepsilon_{ij})$ и интеграл энергии (10.33) могут существовать при некоторых процессах движения идеально упругих твердых тел и идеальных сжимаемых жидкостей и газов.

§ 11. Основной постулат и термодинамика механики сплошной среды

Состояние вещества среды (окрестности точки $\mathbf{x} = \mathrm{const}$ в момент t) уже рассматривалось (§ 2—4, 9). Оно определяется переносным движением окрестности (векторы перемещения $\mathbf{u}$, скорости $\mathbf{v}$, ускорения $\mathbf{w}$, вихря $\boldsymbol{\omega}$) и внутренними характеристиками

(плотность ρ, температура T, тензоры $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{S}$, $\tilde{V}$, $\tilde{Z}$), изменяющимися во времени. Все эти параметры считаются однозначными функциями $\mathbf{x}$, t (или $\boldsymbol{x}$, t) в силу закона движения, т. е. среда — локально-макроскопически однородной. В МСС могут рассматриваться и n-значные параметры для макроскопически n-фазных сред, но мы рассматриваем однозначные.

При изучении уравнений состояния и термодинамики вещества переносным движением окрестности $\mathbf{x}$ можно пренебречь, если рассматривать постоянную достаточно малую массу Δm и объем ΔV

$$\Delta m_g = \rho_g \Delta V = \int\limits_{\Delta V} \rho dV;$$

при этом с любой заданной точностью, на основании (10.19), (10.22) внешние силы, действующие по границе $\Delta\Sigma$, взаимно уравновешены, т. е.

$$\int\limits_{\Delta\Sigma} \mathbf{P}^{(\nu)} d\Sigma = 0, \quad \int\limits_{\Delta\Sigma} \boldsymbol{x} \times \mathbf{P}^{(\nu)} d\Sigma = 0,$$

так как объемные интегралы имеют более высокий порядок малости. В этом смысле процессы, происходящие в частице среды, называются *равновесными.* В принципе такой выбор ΔV возможен и в эксперименте. Работа внешних сил согласно (10.28), сведется только к работе поверхностных сил за счет деформаций объема ΔV. Но

$$\delta' \tilde{A}_\varepsilon = \int\limits_{\Delta\Sigma} \mathbf{P}^{(\nu)} \mathbf{v} \delta t d\Sigma \approx \int\limits_{\Delta V} S^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV \approx S^{ij} \delta\varepsilon_{ij} \Delta V, \qquad (11.1')$$

и потому отнесенная к единице объема *мощность внешних сил численно равна мощности внутренних напряжений*

$$\frac{\delta' \tilde{A}_\varepsilon}{\Delta V \delta t} \equiv \frac{\delta' A}{\delta t} = S^{ij} V_{ij}, \qquad (11.1)$$

$$\delta' A = S^{ij} \delta\varepsilon_{ij} = \sigma^{ij} v_{ij} \delta t.$$

Вследствие непрерывности компонент v_{ij}, σ^{ij} по $\mathbf{x}$ очевидно, что величина $-\delta' A = -S^{ij}\delta\varepsilon_{ij}$ представляет работу рассматриваемой системы (массы Δm_g), сообщаемую через границу $\Delta\Sigma$ окружающей среды за время δt.

Перенос тепла в МСС характеризуется *полем вектора потока тепла* $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ или $\mathbf{q}(\boldsymbol{x}, t)$, причем по определению вектора $\mathbf{q}$ *приток тепла* через замкнутую поверхность $\Delta\Sigma$ к заключенной внутри ΔV массе за время δt равен

$$\delta' \tilde{Q}_T = -\int\limits_{\Delta\Sigma} \mathbf{q}\mathbf{n} d\Sigma \delta t = -\int\limits_{\Delta\Sigma} q_n d\Sigma \delta t. \qquad (11.2')$$

Преобразуя этот интеграл в объемный, получим

$$-\int_{\Delta\Sigma} \mathbf{q}\mathbf{n}\,d\Sigma\delta t = -\delta t \int_{\Delta V} \operatorname{div}\mathbf{q}\,dV \equiv \int_{\Delta V} \delta' Q\,dV \approx \delta' Q_T \Delta V. \qquad (11.2)$$

Следовательно, величину

$$\delta' Q = -\operatorname{div}\mathbf{q}\,\delta t \approx \delta' Q_T \qquad (11.3)$$

можно назвать плотностью притока тепла за время δt, а величину $\delta'\widetilde{Q}_т$ — притоком тепла к массе Δm_g от окружающей среды; численно она равна притоку тепла через границу $\Delta\Sigma$, а с обратным знаком, т. е. — $\delta'\widetilde{Q}_т \approx \operatorname{div}\mathbf{v}\,\delta t\Delta V$, равна количеству тепла, выделяемому массой Δm_g в окружающую среду. В лагранжевых и эйлеровых координатах с учетом (10.6) имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{q} = \nabla_i q^i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{A}\frac{\partial (Aq^i)}{\partial \mathbf{x}^i} = \frac{\partial Q_i(x, t)}{\partial x^i}, \; q^i = \mathbf{q}\text{э}^i, \; Q_i = \mathbf{q}\mathbf{e}_i. \qquad (11.4)$$

Размерность вектора $\mathbf{q}$ выбирается так, чтобы величина $\delta'\widetilde{Q}_т$ имела размерность работы, $\delta'\widetilde{Q}_т/\delta t$ — мощности на единицу объема.

Приток тепла $\delta'\widetilde{Q}_т$ в МСС рассматривается как тепловая *энергия, сообщаемая в единицу объема среды за время δt окружающей этот объем средой.* Предполагается, что $\delta'\widetilde{Q}_т$ можно определить в опытах с помощью калориметрических измерений, основанных на измерении *температуры* $T(\mathbf{x}, t)$ или $T(x, t)$. Подобно тому как работе $\delta' A$ соответствует изменение макроскопических характеристик механического состояния $\delta\varepsilon_{ij}$, предполагается, что количеству тепла $\delta' Q_т$ при отсутствии работы соответствует изменение макроскопической характеристики состояния δT, так что

$$\delta' Q_T = \rho c_\varepsilon \delta T \text{ при } \delta' A = 0. \qquad (11.5)$$

Множитель c_ε называется *коэффициентом теплоемкости вещества при постоянных деформациях.* Физический смысл величины T как статистической характеристики внутреннего состояния частицы Δm_g (системы S_N) выяснен в § 2, 3: она пропорциональна средней кинетической энергии относительного движения частиц системы.

В основу термодинамики и теории уравнений состояния в МСС положен принцип, называемый основным постулатом макроскопической определимости: для данного вещества термомеханическое состояние, т. е. любая термомеханическая макроскопическая величина в точке $\mathbf{x}=\text{const}$, в момент t однозначно определяется процессом (§ 9) $\widetilde{\mathcal{E}}(\tau)$, $T(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ и начальными значениями $\widetilde{\mathcal{E}}(t_0)$, $T(t_0)$ в этой точке. В нем содержится утверждение локаль-

ной определенности состояния, т. е. независимости от $\widetilde{\mathscr{E}}$, T в других точках ($\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$), полноты системы внутренних (в смысле МСС) параметров $\widetilde{\mathscr{E}}$, T. Интуитивно справедливость постулата можно пояснить заменой поверхности $\Delta\Sigma$ частицы Δm_g совершенно непроницаемыми для внутренних частиц плоскими безынерционными стенками (на основании аффинности преобразования) и представлением $\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)$, $T(\tau)$ в виде заданного закона движения стенок и изменения во времени постоянной по объему температуры. Кажется почти достоверным, что «отдача» системы через стенки во внешнюю среду определяется только природой среды, т. е. среднее давление на каждую стенку и выделение тепла (при отсутствии проникающих воздействий электромагнитной природы) однозначно ею определяются.

Из основного постулата и по определению вектора напряжения на границе $\mathbf{P}^{(\nu)} = \mathbf{S}^i \nu_i = \sigma^i n_i$, работы и притока тепла как интегралов

$$\delta' \widetilde{A}_\varepsilon \equiv \int_{\Delta\Sigma} \mathbf{P}^{(\nu)} \mathbf{v} \delta t d\Sigma, \quad \delta' \widetilde{Q}_T \equiv - \int_{\Delta\Sigma} q_n \delta t d\Sigma,$$

которые в принципе в опытах можно измерить для любых процессов, тензор напряжений $\widetilde{S}$, мощность $\delta' A/\delta t$ и скорость притока тепла $\delta' Q_T/\delta t$ — будут определенными функционалами процесса, однозначно определяемыми природой вещества

$$\begin{aligned} \widetilde{S} &= \widetilde{\mathscr{F}} [\widetilde{\mathscr{E}}(\tau), T(\tau)]_{t_0}^t, \quad S^{ij} = \mathscr{F}^{ij} [\widetilde{\mathscr{E}}(\tau), T(\tau)]_{t_0}^t; \\ \frac{\delta' A}{\delta t} &= \mathscr{F}_A [\widetilde{\mathscr{E}}(\tau), T(\tau)]_{t_0}^t \equiv \rho \frac{d}{dt} \Phi_A [\widetilde{\mathscr{E}}(\tau), T(\tau)]_{t_0}^t; \\ \frac{\delta' Q_T}{\delta t} &= \mathscr{F}_T [\widetilde{\mathscr{E}}(\tau), T(\tau)]_{t_0}^t \equiv \rho \frac{d}{dt} \Phi_T [\widetilde{\mathscr{E}}(\tau), T(\tau)]_{t_0}^t. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Выделение множителя $\rho = \rho_0/\sqrt{g}$ не вносит ограничений, так как определитель g выражается через тензор $\widetilde{\mathscr{E}}$. Представление функционалов или операторов, зависящих от параметра (см. § 9), в виде производных по параметру t от других функционалов, принятое в (11.6), не накладывает на них других ограничений, кроме условий интегрируемости $\mathscr{F}_A$, $\mathscr{F}_T$ по времени t. Предполагается существование интегралов

$$\Phi_A(t) \equiv \Phi_A [\widetilde{\mathscr{E}}(\tau), T(\tau)]_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \mathscr{F}_A [\widetilde{\mathscr{E}}(\xi), T(\xi)]_{t_0}^\tau \frac{d\tau}{\rho}, \tag{11.7}$$

$$\Phi_T(t) \equiv \Phi_T [\ldots]_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \mathscr{F}_T [\widetilde{\mathscr{E}}(\xi), T(\xi)]_{t_0}^\tau \frac{d\tau}{\rho},$$

которые с обратными знаками ($-\Phi_A$, $-\Phi_T$) можно назвать *механической энергией и тепловыделением* в точке $\mathbf{x}=\text{const}$, передаваемыми за время $t-t_0$ частицей постоянной массы с единичными начальным объемом и начальной плотностью $\rho_0=\rho(t_0)=\rho\Delta V$ в окружающую среду через ее границу. Первая строка равенств (11.6), устанавливающая связь между тензорами напряжений, деформаций и температурой называется уравнениями состояния.

Внося в (11.6) выражение $\delta' A/\delta t$ (11.1) через мощность внутренних напряжений, получим соотношение

$$\frac{1}{\rho} S^{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt} \Phi_A [\widetilde{\mathscr{E}}, T]_{t_0}^{t}, \tag{11.8}$$

которое при подстановке в него функционалов $\mathscr{F}^{ij}$ (11.6) должно быть тождеством для любого t:

$$\frac{d}{dt} \Phi_A \equiv \frac{1}{\rho} \mathscr{F}^{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \tag{11.8'}$$

Введенные скаляры и тензоры записывались выше как функции времени t для точки $\mathbf{x}=\text{const}$, чтобы подчеркнуть, что рассматриваемые функционалы $\mathscr{F}$ и Φ — операторы по параметру τ в интервале $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ над тензором деформаций $\widetilde{\mathscr{E}}$ и температурой T в той же точке $\mathbf{x}=\text{const}$. Эти функционалы зависят от $\mathbf{x}$ лишь потому, что в конечной области G пространства определены поле $\widetilde{\mathscr{E}}$ и поле T, т. е. функции $\mathbf{x}$, t (для начально однородных сред)

$$\widetilde{\mathscr{E}} = \widetilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x}, \tau), \quad T = T(\mathbf{x}, \tau), \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t, \quad \mathbf{x} \in G. \tag{11.9}$$

В области G определено также поле вектора потока тепла $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(x, t)$. На основании соотношения (11.3) из (11.6) получаем *уравнение распространения тепла*

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \Phi_T [\widetilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x}, \tau), T(\mathbf{x}, \tau)]_{t_0}^{t} = -\operatorname{div} \mathbf{q}, \tag{11.10}$$

или

$$\rho \mathscr{F}_T = -\operatorname{div} \mathbf{q}.$$

Сумма

$$\Phi_A + \Phi_T = u [\widetilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x}, \tau), T(\mathbf{x}, \tau)]_{t_0}^{t} \tag{11.11}$$

называется функционалом внутренней энергии или *внутренней энергией*. Из (11.6) получаем *закон сохранения энергии*

$$\rho du = \delta' A + \delta' Q_T, \tag{11.12}$$

из которого после подстановки выражений $\delta' A$, $\delta' Q_T$ получаем функциональное уравнение в лагранжевых координатах

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = S^{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{q}. \tag{11.13}$$

Возможность построения функционала $u[\widetilde{\mathscr{E}}, T]$ на основе макроопытов рассматривалась в § 4. Если известны уравнения состояния и функционал внутренней энергии, то из сравнения (11.10) и (11.13) находим

$$\rho \mathscr{F}_T \equiv -\rho \frac{\partial \Phi_T}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} - S^{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}, \tag{11.14}$$

т. е. тепловую функцию Φ_T, а непосредственно из (11.6) — механическую энергию Φ_A, т. е. все термомеханические функционалы известны. В частности, из (11.5) и (11.6) находим коэффициент теплопроводности

$$c_\varepsilon = \frac{d\Phi_T/dt}{dT/dt} \equiv \frac{d\Phi_T}{dT} \geqslant 0 \text{ при } \frac{d\widetilde{\mathscr{E}}(t)}{dt} = 0. \tag{11.15}$$

Поле *вектора потока тепла* $\mathbf{q}(\boldsymbol{x}, t)$ в МСС определяется полем температуры $T(\boldsymbol{x}, t)$, а именно пространственным градиентом температуры

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x^i} \mathbf{e}_i = (\nabla_m T) \,\mathbf{э}^m \equiv \frac{\partial T}{\partial \mathrm{x}^m} \mathbf{э}^m, \tag{11.16}$$

причем $\mathbf{q}$ направлен в обратную сторону по отношению к $\operatorname{grad} T$ (т. е. в сторону убывания T):

$$\mathbf{q} = -\widehat{\Lambda} \operatorname{grad} T \equiv -\Lambda^{ij} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathrm{x}^i}\right) \mathbf{э}_j = -\lambda^{ik} \frac{\partial T}{\partial x^i} \mathbf{e}_k. \tag{11.17}$$

$\widehat{\Lambda}$ — положительно определенная матрица *теплопроводности*, определяемая природой вещества, зависящая, вообще говоря, от T, $\operatorname{grad} T$ и $\widetilde{\mathscr{E}}$:

$$\widehat{\Lambda} = \widehat{\Lambda}(T, \widetilde{\mathscr{E}}, \operatorname{grad} T); \tag{11.18}$$

она предполагается известной на основании специальных измерений теплопроводности вещества с использованием *закона Фурье* (11.17).

На основании (11.10) получается *уравнение теплопроводности* в виде

$$\rho F_T \equiv \rho \frac{\partial}{\partial t} \Phi_T [\widetilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x}, \tau), T(\mathbf{x}, \tau)]_{t_0}^{t} = \operatorname{div}(\widehat{\Lambda} \operatorname{grad} T) \tag{11.19}$$

или через функционалы $u(\widetilde{\mathscr{E}}, T)$ и в лагранжевых координатах в виде (11.13).

В § 4 дано другое представление третьей строки формул (11.6), сводящееся к замене функционала Φ_T суммой двух других, и уравнения теплопроводности в виде

$$\frac{\partial \Phi_T}{\partial t} \equiv F_T = T\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{\rho} w^*, \tag{11.20}$$

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(\widehat{\Lambda} \operatorname{grad} T) + w^*.$$

Определение $s(\widetilde{\mathscr{E}}, T)$ и $w^*(\widetilde{\mathscr{E}}, \mathrm{T})$ через Φ_T, следовательно, неоднозначно и требует дополнительного условия, которое конкретизируется для различных сред или процессов заданием функционала

$$w^* = w^* [\widetilde{\mathscr{E}}(\tau), T(\tau)]_{t_0}^{t} \geqslant 0, \tag{11.21}$$

называемого рассеянием. Из (11.20), (11.6), (11.14) следует, что w^* имеет размерность мощности на единицу объема. Из (11.6) и (11.20) следует соотношение

$$\rho T ds = \delta' Q_T + w^* \delta t, \tag{11.22}$$

называемое в МСС *уравнением баланса энтропии*, а функционал $s(\widetilde{\mathscr{E}}, T)$ — энтропией. Из (11.12) и (11.22) следует

$$\begin{gathered} \rho(d\psi + s dT) = \delta' A - w^* dt, \\ \delta' A = S^{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad \psi = u - Ts. \end{gathered} \tag{11.23}$$

Сопоставление равенств (11.12), (11.22), (11.23) с (3.21), (3.24), полученных в статистической механике для равновесных обратимых процессов (§ 3), во-первых, дает некоторое основание для принятой выше терминологии (внутренняя энергия, энтропия, ψ — функционал *свободной энергии*); во-вторых, позволяет определить в МСС *обратимые процессы* как такие, в которых рассеяние равно нулю ($w^* \equiv 0$), и функционалы энергии и энтропии являются *функциями термодинамических параметров состояния* μ_n ($n=0, 1, 2, \ldots$), среди которых $\mu_0 \equiv T$:

$$u = u(\mu), \ \psi = \psi(\mu), \ s = s(\mu); \ w^* \equiv 0, \ \mu_0 \equiv T; \tag{11.24}$$

параметры μ_n ($n=1, 2, \ldots$) должны быть такими, чтобы для всех обратимых процессов существовало тождество

$$\delta' A = S^{ij} d\varepsilon_{ij} \equiv P_n(\mu)\, d\mu_n. \tag{11.25}$$

Тогда для обратимых процессов из (11.23) находим уравнения состояния и выражение энтропии

$$\frac{1}{\rho} P_n = \frac{\partial \psi}{\partial \mu_n}, \ s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}; \ \frac{\partial (P_n/\rho)}{\partial T} + \frac{\partial s}{\partial \mu_n} = 0; \tag{11.26}$$

функционал тепловой функции на основании (11.20) имеет выражение

$$\Phi_T = \int_{t_0}^{t} \left(T ds - w^* \frac{d\tau}{\rho} \right) = \int_{t_0}^{t} T ds. \qquad (11.27)$$

Таким образом, для обратимых процессов необходимо знать только параметры состояния $\mu_n (n=1, 2, \ldots)$, обладающие свойством (11.25), и одну функцию $\psi(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots)$ чтобы знать все термодинамические свойства среды.

Даже для обратимых процессов *нельзя указать* прямых *опытов*, которые позволили бы установить *число и выражение параметров состояния* через характеристики процесса $\mathscr{E}(t)$, $T(\tau)$, если не изучены функционалы (11.6), т. е. их необходимо задать из других соображений и в опытах проверить следствия (11.23) при $w^*=0$ и (11.25), (11.26). В частности, в равновесных опытах с постоянными по объему и меняющимися во времени параметрами состояния $T(t)$, $\mu_n(t)$, $\delta' \widetilde{Q}_T$ выражение (11.2) на основании (11.22) преобразуется к виду

$$\delta' \widetilde{Q}_T = \int_V \rho T \frac{ds}{dt} dV \delta t = T dS_g, \; S_g = \int_{V_g} \rho s dV = \rho s V,$$

т. е. имеет интегрирующий множитель T^{-1}:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{T} \delta' \widetilde{Q}_T = S_g (T_2, \mu_n^2) - S_g (T_1, \mu_n^1). \qquad (11.28)$$

Этот интеграл зависит не от того, по какому закону во времени подается тепло $\delta \widetilde{Q}_T$ и изменяются параметры μ_n, а только от конечных и начальных значений параметров. Равенство (11.28) и служит для нахождения энтропии $s(T, \mu)$. Аналогичное равенство, вытекающее для рассматриваемого объема из (11.12), служит для определения внутренней энергии $u(T, \mu)$. Но для нахождения числа и физического смысла параметров μ в макроопытах могут быть полезны лишь функционалы (11.6), так как параметры в силу основного постулата должны быть функционалами процесса:

$$\mu_n = \mu_n [\widetilde{\mathscr{E}}(\tau), \; T(\tau)]_{t_0}^{t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (11.29)$$

такими, что функционалы (11.6) — просто функции этих параметров.

Для необратимых процессов целесообразное обобщение теории обратимых процессов — это предположение *существования*

дифференциала Фреше для функционала ψ *по* T и представления энтропии в виде функциональной производной от ψ по T (§ 9):

$$s=-\left(\frac{D\psi}{DT}\right)_t,\quad \delta_T\psi\equiv\psi[\widetilde{\mathscr{E}},\,T+\delta T]_{t_0}^t-\psi[\widetilde{\mathscr{E}},\,T]_{t_0}^t=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{D\psi}{DT}\right)_\tau\delta T(\tau)\,d\tau, \tag{11.30}$$

где $\delta T(\tau)=T_1(\tau)-T(\tau)$ — произвольная малая функция. Это эквивалентно замене функционалов $\mathscr{F}_A$, $\mathscr{F}_T$ двумя другими (ψ, w^*), определяемыми уравнениями, вытекающими из (11.23) и (11.6):

$$\frac{d\Phi_T}{dt}\equiv\mathscr{F}_T[\widetilde{\mathscr{E}},\,T]_{t_0}^t=-T\frac{d}{dt}\left(\frac{D\psi}{DT}\right)-\frac{1}{\rho}w^*[\widetilde{\mathscr{E}},\,T]_{t_0}^t,$$

$$\frac{du}{dt}\equiv\mathscr{F}_T+\mathscr{F}_A=\frac{d}{dt}\left(\psi-T\frac{D\psi}{DT}\right), \tag{11.31}$$

или

$$u\equiv\Phi_T+\Phi_A=\psi-T\frac{D\psi}{DT}.$$

Решение этой системы (ψ, w^*) и функционалы $\mathscr{F}^{ij}$ (11.6) должны обладать свойством неотрицательности рассеяния w^*:

$$\frac{1}{\rho}w^*=\frac{1}{\rho}\mathscr{F}^{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}+\frac{D\psi}{DT}\frac{dT}{dt}-\frac{d\psi}{dt}\geqslant 0. \tag{11.32}$$

Таким образом, задание только одного термодинамического функционала свободной энергии $\psi[\widetilde{\mathscr{E}},\,T]$ или функционала внутренней энергии $u[\widetilde{\mathscr{E}},\,T]\equiv\Phi_T+\Phi_A$, через который ψ определяется уравнением

$$\psi-T\frac{D\psi}{DT}=u, \tag{11.33}$$

и функционала $\widetilde{\mathscr{F}}$, определяющего связь между тензором напряжений и деформаций:

$$\widetilde{S}=\widetilde{\mathscr{F}}[\widetilde{\mathscr{E}},\,T],\quad S^{ij}=\mathscr{F}^{ij}[\widetilde{\mathscr{E}},\,T], \tag{11.34}$$

вполне определяет рассеяние w^* (11.32) и уравнение теплопроводности, получающееся из (11.23), (11.31), (11.3) в виде

$$-\rho T\frac{d}{dt}\left(\frac{D\psi}{DT}\right)=-\operatorname{div}\mathbf{q}+w^* \tag{11.35'}$$

или в виде

$$\rho \frac{du}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathcal{F}^{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \qquad (11.35'')$$

Если функционалы $\mathcal{F}^{ij}$ выражаются через $\psi[\tilde{\mathscr{E}}, T]_{t_0}^{t}$ формулами

$$\frac{1}{\rho} \mathcal{F}^{ij} = \frac{D\psi}{D\varepsilon_{ij}}, \qquad (11.36')$$

где функциональные производные по ε_{ij} определяются аналогично $D\psi/DT$ (11.30), то, называя полной функциональной производной от ψ по t

$$\frac{D\psi}{Dt} \equiv \frac{D\psi}{D\varepsilon_{ij}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{D\psi}{DT} \frac{dT}{dt}, \qquad (11.36)$$

получим простое выражение для рассеяния

$$\frac{1}{\rho} w^* = \frac{D\psi}{Dt} - \frac{d\psi}{dt}. \qquad (11.32')$$

Изложенное относится к термомеханическим процессам, определяемым деформациями и температурой. Если существуют другие физические поля, определяемые параметрами $\beta_r (r = 1, 2, \ldots)$, в теорию вносятся поправки. Предполагается, что возникают дополнительные силы, действующие на весь объем мысленно выделенной частицы массы $\rho\Delta V$, совершающие за время δt работу

$$\delta' A_\beta \Delta V = W_\beta \delta t \Delta V,$$

и что возникает дополнительный к $\delta' Q_{\text{т}}$ приток тепла $\rho q_\beta \, \delta t \Delta V$ за счет проникающего облучения или источника диссипативного характера. Например, в случае электромагнитного поля с электрическим вектором $\mathbf{E}$ и магнитным $\mathbf{H}$ (§ 22)

$$\delta' A_\beta = W_\beta dt = 1/4\pi (\mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B}), \qquad (11.37)$$

где $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ — векторы электрической и магнитной индукции, т. е. набор параметров β_r состоит из компонент двух векторов: $\beta = (\mathbf{D}, \mathbf{B})$; объемная плотность источника тепла ρq_β представляет джоулево тепло.

Первый и второй законы термодинамики получаются в обобщенном виде

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = S^{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + W_\beta - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho q_\beta,$$

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho q_\beta + w^*, \qquad (11.38)$$

причем входящие в них функции или функционалы (u, s, w^*, q_β, ...) определяются процессом изменения функций времени

$\widetilde{\mathscr{E}}(\tau)$, $T(\tau)$, $\beta(\tau)$. Интегральная форма этих законов для фиксированной движущейся массы с объемом V_g и поверхностью Σ_g получается из (11.38) интегрированием по объему равенств (11.38) и определению внутренней энергии U_g и энтропии S_g рассматриваемой массы:

$$U_g(t) = \int_{V_g} \rho u dV, \quad S_g = \int_{V_g} \rho s dV. \tag{11.39}$$

Из первого равенства (11.38) и (10.29) получаем

$$dU_g = \int_{V_g} (S^{ij} d\varepsilon_{ij} - \operatorname{div} \mathbf{q} dt + W_\beta dt + \rho q_\beta dt)\, dV =$$
$$= \delta' \widetilde{A} - dK_g - \int_{\Sigma_g} \mathbf{qn} d\Sigma dt + \delta' \widetilde{A}_\beta.$$

или согласно (11.2′)

$$d(K_g + U_g) = \delta' \widetilde{A} + \delta' \widetilde{Q}_T + \delta' \widetilde{A}_\beta, \tag{11.40}$$
$$\delta' \widehat{A}_\beta = \int_{V_g} (W_\beta + \rho q_\beta)\, dV dt.$$

Здесь K_g — кинетическая энергия (10.26), $\delta'\widetilde{A}$ — работа массовых и поверхностных сил (10.28), $\delta'\widetilde{Q}_т$ — приток тепла (11.2′), $\delta'\widetilde{A}_\beta$ — приток энергии, связанный с параметрами β.

Интегрируя второе уравнение (11.38) с множителем T^{-1} и учитывая преобразование

$$\int_{V_g} \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \int_{\Sigma_g} \frac{1}{T} \mathbf{qn} d\Sigma + \int_{V_g} \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \operatorname{grad} T dV, \tag{11.41}$$

получим интегральную форму закона баланса энтропии

$$dS_g = \int_{\Sigma_g} \frac{1}{T} \delta' Q_T d\Sigma + \int_{V_g} \frac{1}{T} \left(w^* - \frac{1}{T} \mathbf{q} \operatorname{grad} T + \rho q_\beta \right) dV dt. \tag{11.42}$$

Согласно закону Фурье

$$-\mathbf{q} \operatorname{grad} T = \widehat{\Lambda} (\operatorname{grad} T)^2 \geqslant 0.$$

Сумму

$$w^* - \frac{1}{T} \mathbf{q} \operatorname{grad} T$$

называют иногда *объемной плотностью некомпенсированного тепла в термомеханических процессах.*

§ 12. Замкнутые системы уравнений и некоторые их свойства

Адекватность методов Лагранжа и Эйлера в МСС позволяет пользоваться любым из них.

Сначала будем следовать методу Лагранжа и систему координат x_i в начальный момент времени считать декартовой ортогональной. Тензор напряжений по-прежнему обозначим $\widetilde{S}$, тензор деформаций $\widetilde{\varepsilon}$, тогда их компоненты будут S^{ij} и ε_{ij}, $2\varepsilon_{ij}=g_{ij}-\delta_{ij}$.

Общие уравнения МСС (§ 6, 8, 10, 11) в сокращенной записи суть:

1. Уравнения, выражающие тензор деформаций $\widetilde{\varepsilon}$ и плотность ρ через вектор перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ или $\boldsymbol{x}\equiv\varphi=\mathbf{x}+\mathbf{u}$:

$$g_{ij}=A_i^k A_j^k; \quad 2\varepsilon_{ij}=g_{ij}-\delta_{ij}; \quad \rho A=\rho_0;$$

$$g=|g_{ij}|=A^2; \quad A=|A_i^k|; \quad A_i^k=\frac{\partial x^k}{\partial \mathrm{x}^i}. \qquad (12.1)$$

Эти уравнения алгебраически выражают ε_{ij} и ρ через первые производные $\partial x^i/\partial \mathrm{x}^j=A^i_{.j}=\varphi^i_{.j}$.

2. Уравнения движения, которые эквивалентны одному векторному уравнению:

$$\nabla_i \mathbf{S}^i+\rho(\mathbf{F}-\ddot{\boldsymbol{x}})=0, \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}=\ddot{\boldsymbol{x}},$$

причем $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\boldsymbol{x}, t)$ — заданная массовая сила.

Уравнения записываются также в виде (10.11)

$$\rho_0(\ddot{x}^i-\mathrm{X}^i)=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^m}(AA_j^i S^{mj}). \qquad (12.2)$$

Структура этих трех скалярных уравнений, очевидно, такова: они линейно связывают между собой напряжения S^{ij} и их первые производные $S^{ij}_{,k}$ со вторыми производными по времени компонент вектора $\boldsymbol{x}$.

3. В тех случаях, когда за независимые искомые функции принимаются деформации ε_{ij} или напряжения S^{ij}, должны быть удовлетворены еще условия совместности (6.76)

$$R_{lmpq}=0,$$

где индексы $lmpq$ имеют шесть независимых комбинаций (1221 и т. д.). Тензор кривизны R_{lmpq} алгебраически выражается через ε_{ij}, $\varepsilon_{ij,k}$ и $\varepsilon_{ij,km}$, причем через вторые производные от ε_{ij} — линейно. Эти шесть уравнений кратко запишем в виде

$$R=R(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}, \varepsilon_{ij,km})=0. \qquad (12.3)$$

Существенно, что если, как и сделаем, за независимую искомую функцию принять вектор $\boldsymbol{x}$ или перемещение $\mathbf{u}$, то на основании (12.1) уравнения (12.3) обратятся в тождества и потому могут не рассматриваться.

Следовательно, для вектора $\mathbf{u}$ и тензора напряжений $\widetilde{S}$ получается только одно уравнение (12.2), т. е. для девяти функций

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ S^{11},\ S^{22},\ S^{33},\ S^{12}=S^{21},\ S^{23}=S^{32},\ S^{31}=S^{13}$$

мы из (12.2) имеем только систему трех дифференциальных уравнений. Такая система называется *незамкнутой*, т. е. не позволяет найти $\boldsymbol{x}$ и $\widetilde{S}$, каковы бы ни были граничные и начальные условия для $\boldsymbol{x}$ и $\widetilde{S}$. Это естественно, поскольку специфические физические свойства среды еще не учтены.

4. Уравнения состояния (§ 11) дают выражение тензора напряжения $\widetilde{S}$ в точке $\mathbf{x}$ в момент t через значения тензора деформации $\widetilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x}, \tau)$, температуры $T(\mathbf{x}, \tau)$ и параметров $\beta(\mathbf{x}, \tau)$ при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ с помощью функционала или оператора $\widetilde{\mathscr{F}}$, определяемого только природой среды:

$$\widetilde{S}(\mathbf{x},\ t)=\widetilde{\mathscr{F}}[\widetilde{\mathscr{E}},\ T,\ \beta]_{t_0}^{t}. \tag{12.4'}$$

Для многих сред верно и обратное: если задан *процесс нагружения* $\widetilde{S}=\widetilde{S}(\mathbf{x}, t)$, то деформации тем самым определяются однозначно

$$\widetilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x},\ t)=\widetilde{\mathscr{F}}^{-1}[\widetilde{S},\ T,\ \beta]_{t_0}^{t}. \tag{12.4''}$$

Соотношения (12.4′) и (12.4″) суть различные формы выражения одного и того же *закона связи между напряжениями и деформациями* сплошной среды.

В более подробной записи в лагранжевых координатах на основании (11.6), (11.9) имеем соотношения

$$\widetilde{\mathscr{E}}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{33}\end{pmatrix}, \tag{12.5}$$

$$S^{ij}=\mathscr{F}^{ij}[\widetilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x},\ \tau)\,T(\mathbf{x},\ \tau),\ \beta(\mathbf{x},\ \tau)]_{t_0}^{t},$$

которые представляют для симметричных S^{ij} шесть скалярных уравнений.

Как только установлен закон (12.5) и заданы $T(\mathbf{x}, \tau)$, $\beta(\mathbf{x}, \tau)$, уравнения (12.2) становятся замкнутыми. Действительно, внося значения S^{ij} в (12.2), получим одно векторное уравнение для вектора $\boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$ или три скалярных уравнения для его трех компонент x^i. В общем случае это функциональные уравнения, и их

структура полностью определяется структурой физического закона (12.5). Для классических сред (идеальные жидкости и газы, упругие тела) — это дифференциальные уравнения, для релаксирующих сред — интегродифференциальные и т. д.

Одно важное общее свойство соотношений (12.5) очевидно: они должны изменяться при ортогональных преобразованиях начальных декартовых координат x^i так, чтобы правильно представлять физические свойства. В общем случае это означает, что в (12.5) кроме указанных переменных $\widetilde{S}(t)$, $\widetilde{\mathscr{E}}(t)$, $\mu(t)$ должны входить тензоры-константы среды, например тензоры 4-го порядка C_{ijmn} и т. д., являющиеся физическими постоянными вещества или функциями параметров T, β.

Во многих частных случаях физические константы (функции T, β) при $t=t_0$ — скаляры, а единственный начальный тензор-константа — δ_{ij} и порождаемые им тензоры 4-го и других порядков

$$\delta_{ij}\delta_{mn}, \quad \delta_{ij}\delta_{mn} \pm \delta_{im}\delta_{nj}, \ \ldots \qquad (12.6)$$

В таких случаях говорят, что среда начально *изотропна*, хотя она и может приобретать анизотропию в процессе деформации. В противном случае ее называют *анизотропной*. Для изотропных сред соотношения (12.5) могут быть существенно упрощены (см. § 19).

Мы считали, что параметры T, β есть заданные функции времени и координат. В действительности нередко они сами являются искомыми и даже зависят от $\widetilde{\mathscr{E}}$. При этом необходимо еще использовать законы термодинамики и другие законы физики для немеханических параметров.

5. Пример теории, в которой используются уравнения для неизвестных функций $\beta(x, t)$, рассматривается в § 22. Здесь и в других разделах параметры $\beta(\mathbf{x}, t)$ предполагаются известными функциями $\mathbf{x}$, t. Уравнение, замыкающее систему (12.2), (12.5), — это уравнение теплопроводности в виде (11.19) с поправкой на приток тепла ρq_β:

$$\rho\mathscr{F}_T \equiv \rho\frac{\partial}{\partial t}\Phi_T\,[\widetilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x},\tau),\ T(\mathbf{x},\tau),\ \beta(\mathbf{x},\tau)]_{t_0}^{t} = \\ = \operatorname{div}(\hat{\Lambda}\operatorname{grad}T(\mathbf{x},t)) + \rho q_\beta, \qquad (12.7)$$

означающее равенство выделяемого частицей через ее границу количества тепла внешнему оттоку тепла через эту границу. Скалярный функционал $\Phi_T[\widetilde{\mathscr{E}}, T, \beta]$, как и тензорный $\widetilde{\mathscr{F}}$, для рассматриваемой среды предполагается известным на основании макроскопических опытов (§ 11). Уравнение (12.7) на основании (11.4), (11.17) с учетом закона сохранения массы ($\rho A=\rho_0$) преобразуется к виду

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_T [\widetilde{\mathscr{E}},\ T,\ \beta]_{t_0}^t = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(A\Lambda^{mn} \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) + \rho_0 q_\beta. \qquad (12.8)$$

Для изотропной среды, имеющей одинаковый для всех направленный коэффициент теплопроводности λ, из (11.16), (11.17) имеем

$$\Lambda^{ij} = \lambda g^{ij}. \qquad (12.9)$$

Здесь λ может быть известной функцией температуры $T(\mathbf{x},\ t)$ и плотности $\rho(\mathbf{x},\ t) = \rho_0/A$.

Другая форма записи уравнений, замыкающих систему (12.2), (12.5), следует из (11.38) и предполагает известным функционал внутренней энергии

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u [\widetilde{\mathscr{E}}(\mathbf{x},\ \tau),\ T(\mathbf{x},\ \tau),\ \beta(\mathbf{x},\ \tau)]_{t_0}^t = S^{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + W_\beta + $$
$$+ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(A\Lambda^{mn} \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) + \rho q_\beta. \qquad (12.10)$$

В некотором классе необратимых термомеханических процессов ($\beta \equiv 0$), включая и обратимые, система уравнений движения (12.2) замыкается, если известен только один функционал свободной энергии ψ, через который выражаются уравнения состояния (12.5), функционалы энергии, энтропии и рассеяния формулами (11.30), (11.32), (11.36′):

$$\frac{1}{\rho} S^{ij} = \frac{1}{\rho} \mathscr{F}^{ij} \equiv \frac{D\psi}{D\varepsilon_{ij}}, \quad s = -\frac{D\psi}{DT}, \quad u = \psi + Ts,$$
$$\frac{1}{\rho} w^* = \frac{D\psi}{Dt} - \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad \frac{D\psi}{Dt} \equiv \frac{D\psi}{DT} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{D\psi}{D\varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}. \qquad (12.11)$$

Уравнение (12.10) преобразуется к виду

$$-\rho_0 T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D\psi}{DT} \right) = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(A\Lambda^{mn} \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) + \frac{\rho_0}{\rho} w^*. \qquad (12.12)$$

Если в необратимых процессах имеют место соотношения (12.11) и (12.12), то говорят, что существует *обобщенный потенциал* ψ.

По определению система уравнений (12.2), (12.5), (12.8) называется *замкнутой системой уравнений МСС* для внутренних точек области движения среды. В силу основного постулата решение этой системы существует при некоторых начальных условиях и условиях на границе области. Уравнение (12.8) может быть заменено на (12.10). В случае существования обобщенного потенциала ψ система (12.2), (12.11), (12.12) замкнута. При этом функциональной производной ψ по функции $z(\mathbf{x},\ t)$ называется ядро интегрального представления вариации ψ по z (при $\tau = t$)

$$\psi[\ldots z+\delta z]_{t_0}^{t}-\psi[\ldots z]_{t_0}^{t}\equiv\delta_z\psi(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{D\psi}{Dz}\right)_{\tau}\delta z(\tau)\,d\tau\equiv$$

$$\equiv\int\limits_{t_0}^{t}\psi_z[\ldots z(\xi)]_{t_0}^{\tau}\,\delta z(\tau)\,d\tau, \qquad (12.13)$$

т. е. функционал ψ_z, зависящий от $\psi[\ldots z]$, но не от δz; z — любая из функций ε_{ij}, T, β:

$$\left(\frac{D\psi}{Dz}\right)_{\tau}=\psi_z[\ldots z(\mathbf{x},\ \xi)]_{\xi=t_0}^{\tau}.$$

Таким образом, замкнутая система уравнений МСС в лагранжевых координатах определяет (вместе с начальными и граничными условиями) две искомые функции: вектор-функцию $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\ t)$ и скалярную функцию $T(\mathbf{x},\ t)$, т. е. закон движения физических частиц и температуру. Все другие функции, представляющие теоретический или практический интерес, являются заданными операторами по $(\mathbf{x},\ t)$ от $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\ t)$ и $T(\mathbf{x},t)$, например деформации (12.1), напряжения (12.5), критерии разрушения в твердых телах, условия начала турбулентности, отрыва потоков в жидкостях и газах и т. п., и могут быть найдены.

В эйлеровом пространстве *обычно* основными искомыми функциями являются вектор скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{x},\ t)$, плотность $\rho(\boldsymbol{x},\ t)$ и температура $T(\boldsymbol{x},\ t)$ в пространстве наблюдателя в неподвижных декартовых координатах $(x^1,\ x^2,\ x^3)$, т. е. одна вектор-функция и две скалярных. Основными при этом являются следующие уравнения МСС.

1. Уравнения, выражающие тензор скорости деформации $\tilde{V}$, а также дисторсии скоростей через вектор $\tilde{v}$:

$$v_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right). \qquad (12.14)$$

2. Закон сохранения массы, связывающий плотность $\rho(\boldsymbol{x},\ t)$ с вектором $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i}=0,\quad \text{или}\quad \frac{d\ln\rho}{dt}+\operatorname{div}\mathbf{v}=0. \qquad (12.15)$$

3. Уравнения движения (10.13)

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right)=\rho X^i+\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j},$$

или

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\mathbf{F}\right)=\frac{\partial\sigma^i}{\partial x^i}, \qquad (12.16)$$

связывающие дивергенцию тензора напряжения $\widetilde{S}$ с векторами ускорения $d\mathbf{v}/dt$ и заданной массовой силы $\mathbf{F}=X^i\mathbf{e}_i$.

Уравнения (12.14)—(12.16) получаются из (12.1), (12.2) и из условия сохранения массы $\rho A=\rho_0$ их простыми преобразованиями от лагранжевой к эйлеровой системе координат, содержащими закон движения $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathrm{x},\ t)$ физической частицы $(A^i_j=\partial\varphi^i/\partial \mathrm{x}^j, \ldots)$.

4. Уравнения сохранения (12.5) в некоторых случаях, включающих классическую теорию жидкостей и газов и теорию некоторых изотропных жидких и твердых тел со сложными свойствами, могут быть преобразованы к виду

$$\widetilde{L}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{x}},\ \widetilde{S},\ \frac{d}{dt}\widetilde{S};\ \rho,\ T,\ \beta\right)=0, \qquad (12.17')$$

где $\widetilde{L}$ — тензор-функция перечисленных в скобках тензоров дисторсии скоростей, напряжения, скорости напряжения и скаляров ρ, T, β в точке $\boldsymbol{x}$ эйлерова пространства в момент t. На основании формул преобразования § 8, 9 такой переход от (12.5) к (12.17′) возможен при частном виде функционала $\widetilde{\mathcal{F}}$.

В декартовых координатах x^i (12.17′) означает, что известно шесть функций $L^{ij}=L^{ji}$ от $\partial v^i/\partial x^j$, напряжений σ^{ij} и их полных скоростей

$$\frac{d\sigma^{ij}}{dt}=\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial t}+v^k\,\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^k},$$

а также ρ, T, β, причем L^{ij} — декартовы компоненты $\widetilde{L}$:

$$L^{ij}\left(\frac{\partial v^k}{\partial x^l},\ \sigma^{mn},\ \frac{d\sigma^{pq}}{dt},\ \rho,\ T,\ \beta\right)=0. \qquad (12.17)$$

Если температура T и параметры β известны как функции $\boldsymbol{x}$, t, то уравнения (12.15)—(12.17) представляют замкнутую систему десяти нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно вектора $\mathbf{v}$, тензора $\widetilde{S}$ и плотности ρ, т. е. десяти искомых функций $(v^i,\ \sigma^{ij},\ \rho)$.

5. Уравнение состояния, замыкающее систему, получается из (11.38), если известен функционал внутренней энергии u; на основании (11.4), (11.17) и инвариантности формы

$$S^{ij}\,\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}=\sigma^{ij}v_{ij}$$

в изотропной среде оно имеет вид

$$\rho\,\frac{du}{dt}\equiv\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+v^i\,\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)=\sigma^{ij}v_{ij}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x^i}\right)+W_\beta+\rho q_\beta. \qquad (12.18)$$

Если определена энтропия s и рассеяние w^*, то это уравнение заменяется следующим:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}\right) + w^* + \rho q_\beta . \qquad (12.18')$$

При уравнении состояния вида (12.17) энергия и энтропия s обычно есть *функции* ρ, T, β, а рассеяние w^* — функция еще и тензора скорости деформации (12.14):

$$u = u(\rho,\ T,\ \beta), \quad s = s(\rho,\ T,\ \beta), \quad w^* = f^*(\rho,\ T,\ \beta,\ v_{ij}). \qquad (12.19)$$

Переход от замкнутой системы уравнений МСС в лагранжевых координатах к системе в эйлеровых в общем случае связан с трудностями преобразования функционала состояния $\Phi_{\text{т}}$ (12,8), или ψ (12.12), или u (12.10), т. е. трудностями, о которых сказано в теории процессов (§ 9). Существенный элемент такого перехода — введение поля вектора перемещения физических частиц в эйлеровом пространстве (новой искомой функции от $\boldsymbol{x}$, t)

$$\mathbf{u}^0(\boldsymbol{x},\ t) = \overset{0}{u_i}\mathbf{e}_i = \boldsymbol{x} - \mathfrak{x}(\boldsymbol{x},\ t), \qquad (12.20)$$

т. е. радиус-вектора $\mathfrak{x}(\boldsymbol{x}, t)$, который остается постоянным во времени для $\boldsymbol{x} = \varphi(\mathbf{x},\ t)$ при $\mathbf{x} = \text{const}$. В силу закона движения и определения вектора скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{x},\ t)$

$$\mathfrak{x}(\boldsymbol{x},\ t) = \mathbf{x} = \text{const} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} = \varphi(\mathbf{x},\ t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{v}(\boldsymbol{x},\ t). \qquad (12.21')$$

Отсюда получаем для $\mathfrak{x}$ дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} + v^i \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x^i} = 0. \qquad (12.21)$$

Обозначая через $\widetilde{B}$ производную от $\mathfrak{x}$ по $\boldsymbol{x}$ и $\widetilde{b}$ — обратный тензор:

$$\widetilde{B}(\boldsymbol{x},\ t) \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad B^i_j = \frac{\partial \mathfrak{x}^i}{\partial x^j},$$

$$\widetilde{b}(\boldsymbol{x}, t)\,\widetilde{B}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad b^i_j B^j_k = \delta^i_k , \qquad (12.22)$$

найдем тензор деформации $\widetilde{\mathscr{E}}$ в компонентах E_{ij} (8.77) и выражения компонент тензора деформаций ε_{ij} (8.74) как алгебраических функций от $B^n_m(\boldsymbol{x}, t)$:

$$2E_{ij}(\boldsymbol{x},\ t) = \delta_{ij} - B^k_i B^k_j , \quad \varepsilon_{ij} = E_{mn} b^m_i b^n_j . \qquad (12.23)$$

Наконец, находим выражения компонент S^{ij} тензора $\widetilde{S}$ через компоненты его $\sigma^{ij}=\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ (§ 9):

$$S^{ij}=\sigma^{mn}B^i_m B^j_n, \quad \sigma_{mn}=S^{ij}b^m_i b^n_j. \tag{12.24}$$

«Подставляя» эти выражения ε_{ij}, S^{ij} в уравнения состояния (12.5), мы преобразуем их в эйлерово пространство. Но, как уже выяснено в § 9, эта «подстановка» в общем случае — сложная задача: оператор $\widetilde{\mathcal{F}}$, определенный по параметру $t_0\leqslant\tau\leqslant t$ над функциями $\varepsilon_{pq}(\mathbf{x}, \tau)$, должен быть преобразован в оператор над функциями $E_{pq}(\boldsymbol{x}, t)$ и $\mathfrak{v}(\boldsymbol{x}, t)$ по переменным $\boldsymbol{x}$, τ. Примеры эффективных преобразований такого рода даны в § 9 и связаны с понятиями производных и интегралов тензора $v_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ различных кратностей. Если, например, функционал (12.5) имеет вид

$$S^{ij}=\mathcal{F}^{ij}(\varepsilon_{mn}, \partial\varepsilon_{pq}/\partial t, \ldots), \tag{12.25$'$}$$

где $\mathcal{F}^{ij}$ — заданные функции деформаций $\varepsilon_{mn}(\mathbf{x}, t)$, их скоростей $\partial\varepsilon_{pq}(\mathbf{x}, t)/\partial t$ и ускорений различных порядков, то, умножая (12.25′) на $b^m_i(\boldsymbol{x}, t)\,b^n_j(\boldsymbol{x}, t)$ и подставляя выражения деформаций (12.23) $\varepsilon_{mn}(\mathbf{x}, t)$ через $E_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$, выражения скоростей деформаций $\partial\varepsilon_{pq}/\partial t$ — через $v_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ по формулам (9.33), (9.34)

$$\frac{\partial\varepsilon_{pq}}{\partial t}=v_{ij}b^i_p b^j_q,$$

ускорений — по формулам

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{pq}}{\partial t^2}=\overset{\circ}{v}_{ij}b^i_p b^j_q, \quad \overset{\circ}{v}_{ij}=\frac{dv_{ij}(\boldsymbol{x}, t)}{dt}+v_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial x^j}+v_{jk}\frac{\partial v^k}{\partial x^i}$$

и т. д., получим уравнения (12.25′) в эйлеровом пространстве:

$$\sigma_{mn}=b^m_i b^n_j\mathcal{F}^{ij}(b^k_p b^l_q E_{pq}, b^k_p b^l_q v_{kl}, \ldots), \tag{12.25$''$}$$

явно выражающие напряжения через два вектора: $\mathbf{v}$, $\mathfrak{a}$. Система уравнений (12.14), (12.15), (12.16), (12.21), (12.25″) — замкнута и после подстановки (12.25) в (12.16) приводится к семи уравнениям (12.15), (12.16) и (12.21) для семи функций: ρ, v^i, $\mathfrak{v}^i$.

Переход от постановки задачи в эйлеровом пространстве к постановке в лагранжевом аналогичен; поскольку в первой определен вектор $\mathfrak{v}(\boldsymbol{x}, t)$, то закон движения $\boldsymbol{x}=\varphi(\mathbf{x}, t)$ известен как решение уравнения $\mathfrak{v}(\boldsymbol{x}, t)=\mathbf{x}$, т. е. $\mathfrak{v}(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\equiv\mathbf{x}$. Отсюда находим связь между

$$\widetilde{B}(\boldsymbol{x}, t)=\frac{\partial\mathfrak{v}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial\boldsymbol{x}} \quad \text{и} \quad A(\mathbf{x}, t)=\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial\mathbf{x}}$$

для физических частиц:

$$\widetilde{A}(\mathbf{x},\ t)\widetilde{B}(\boldsymbol{x},\ t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}. \tag{12.26}$$

Из сравнения с (12.22) ясно, что

$$\widetilde{A}(\mathbf{x},\ t) = \widetilde{b}(\varphi,\ t), \quad g_{ij}(\mathbf{x},\ t) = A_i^k A_j^k.$$

Скорости деформации и напряжения преобразуются по формулам

$$v_{ij}(\boldsymbol{x},\ t) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mn}}{\partial t} A_i^m A_j^n,$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},\ t) = S^{mn} A_m^i A_n^j.$$

Подставляя полученные выражения в уравнения состояния типа (12.17), получим их представление в лагранжевых координатах.

В заключение приведем замкнутую систему уравнений МСС в эйлеровом пространстве для фиксированного в нем произвольного объема V с поверхностью Σ и произвольного фиксированного интервала времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Разность значений функций $z(\mathbf{x},\ t)$, определенных внутри V и на поверхности в конечные моменты времени, обозначим Δz:

$$\Delta z \equiv z(\boldsymbol{x},\ t_2) - z(\boldsymbol{x},\ t_1) \equiv z_2 - z_1. \tag{12.27}$$

Такие уравнения полезны как в методах решения задач, так и в случаях, когда внутри или на границе области движения некоторые функции и функционалы разрывны. Уравнения получаются интегрированием по t соответствующих интегральных (по объему) выражений рассмотренных выше законов сохранения массы, импульсов и энергии либо интегрированием по t и по V дифференциальных их выражений. Но в принципе более правильно считать такие *разностно-интегральные уравнения* МСС *аксиомами*, непосредственно согласованными с основным постулатом, определяющим функционалы, так как, по существу, в них допускается возможность ненепрерывных (по $\boldsymbol{x}$, t) решений, т. е. решений замкнутой системы в *обобщенных функциях*.

Отмечая для любой $z(\boldsymbol{x},\ t)$ соотношение

$$\rho \frac{dz}{dt} = \frac{\partial(\rho z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i z)}{\partial x^i}, \tag{12.28}$$

следующее из условия сохранения массы, найдем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \frac{dz}{dt} dV = \int_V \Delta(\rho z)\, dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Sigma \rho z \mathbf{v}\mathbf{n} d\Sigma, \tag{12.28'}$$

откуда при $z = \text{const}$ получаем закон сохранения массы

$$\int\limits_V \Delta\rho dV = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Sigma \rho \mathbf{v}\mathbf{n} d\Sigma. \qquad (12.29)$$

Интегрируя по t соотношение (10.20), получаем закон сохранения импульса (уравнения движения)

$$\int\limits_V \Delta(\rho\mathbf{v})\, dV + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Sigma \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{n})\, d\Sigma =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Sigma \mathcal{P}^{(\nu)} d\Sigma + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_V \rho\mathbf{F} dV. \qquad (12.30)$$

Первое уравнение (11.38) в эйлеровых координатах имеет вид

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma^{ij} v_{ij} - \operatorname{div}\mathbf{q} + W_\beta + \rho q_\beta. \qquad (12.31')$$

Интегрируя его по t и V, учитывая уже известные преобразования

$$\int\limits_V \sigma^{ij} v_{ij} dV = \int\limits_\Sigma \mathcal{P}^{(\nu)} \mathbf{v} d\Sigma - \int\limits_V \frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j} v^i dV = \int\limits_\Sigma \mathcal{P}^{(\nu)} \mathbf{v} d\Sigma + \int\limits_V \rho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) dV,$$

а также (12.28′) при $z = \mathbf{v}$ и $z = u$, получим закон сохранения энергии в разностно-интегральной форме:

$$\int\limits_V \Delta\left[\rho\left(u + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) dV + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Sigma \rho\left(u + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) \mathbf{v}\mathbf{n} d\Sigma =\right.$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Sigma (\mathcal{P}^{(\nu)}\mathbf{v} - \mathbf{q}\mathbf{n})\, d\Sigma + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_V (\rho\mathbf{F}\mathbf{v} + W_\beta + \rho q_\beta)\, dV. \qquad (12.31)$$

Второе уравнение (11.38) аналогичным образом приводится к следующей форме закона баланса энтропии:

$$\int\limits_V \Delta(\rho s)\, dV + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Sigma \rho s \mathbf{v}\mathbf{n} d\Sigma =$$

$$= -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_V \frac{1}{T} \operatorname{div}\mathbf{q} dV + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_V \frac{1}{T} (w^* + \rho q_\beta)\, dV. \qquad (12.32)$$

Интегрально-разностные уравнения (12.28) — (12.32) называют *законами сохранения* для конечных объемов пространства, и они вместе с законом Фурье $\mathbf{q} = -\hat{\Lambda}\,\mathrm{grad}\,T$ также представляют замкнутую систему уравнений МСС, если известны функционалы $\mathcal{F}$, u, s, $w^* \geqslant 0$ и учитывается соотношение между S и $\mathcal{P}^{(\nu)}$ на поверхности $\Sigma : \sigma^i n_i = \mathcal{P}^{\nu)}$.

§ 13. Постановка задач и граничные условия

Поставить конкретную задачу МСС — значит выбрать соответствующую замкнутую систему уравнений, задать внешние силы и выбрать соответствующие начальные и граничные условия для вектора перемещений $\mathbf{u}$ или тензора напряжений S^{ij}, или смешанные (для $\mathbf{u}$ и S^{ij}), а также выбрать условия для температуры T, или потока тепла $\mathbf{q}$, или смешанные (T и $\mathbf{q}$). Могут быть еще и смешанные термомеханические условия, связывающие между собой $\mathbf{u}$, S^{ij}, T, $\mathbf{q}$, или еще более общего вида (включающие параметры β).

Массовая сила, определяемая вектором $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ и входящая в уравнение движения (10.8), в большинстве случаев известна. Это сила тяжести $|\mathbf{F}| = g$, или всемирного тяготения, в некоторых случаях это известная сила инерции переносного движения, возникающая за счет ускоренного движения системы координат. Но иногда эта сила может быть определена с необходимой точностью только в результате решения некоторой задачи МСС, так как не является известной функцией $(\boldsymbol{x}, t)$, а функцией $(\boldsymbol{x}, \mathbf{x}, t)$, как, например, сила тяготения между частицами тела.

На границе тела Σ, которая может быть известной или неизвестной (при любом t), *механические граничные условия могут быть кинематическими*, *динамическими* и *смешанными*. В первом случае полностью задан вектор перемещения $\mathbf{u}^{(\nu)}$ или скорости $\mathbf{v}^{(\nu)}$, во втором — вектор поверхностной силы $\mathbf{P}^{(\nu)}$, в третьем — векторное соотношение между $\mathbf{P}^{(\nu)}$, $\mathbf{u}^{(\nu)}$ или $\mathbf{P}^{(\nu)}$, $\mathbf{v}^{(\nu)}$. На частях поверхности $\Sigma : \Sigma_u$, Σ_p, Σ_{up} — могут быть заданы: на Σ_u — вектор $\mathbf{u}^{(\nu)}$ или $\mathbf{v}^{(\nu)}$, на Σ_p — вектор $\mathbf{P}^{(\nu)}$, на Σ_{up} — векторное соотношение между $\mathbf{u}^{(\nu)}$ или $\mathbf{v}^{(\nu)}$ и $\mathbf{P}^{(\nu)}$ и их производными по времени и координатам. На всех частях поверхности, следовательно, задается вектор, и условия называются полными; если задается только компонента вектора — неполными.

Перечислим *основные механические граничные условия в задачах МСС* в предположении, что граница области тела Σ задана уравнением $\Phi(\boldsymbol{x}, t) = 0$ в эйлеровом пространстве и единичная нормаль $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}$ к ней известна:

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{\nu} = \frac{\mathrm{grad}\,\Phi}{|\mathrm{grad}\,\Phi|} \text{ на } \Phi(\boldsymbol{x}, t) = 0. \tag{13.1}$$

Поверхность $\Phi = 0$ представим состоящей из трех частей: Σ_v, Σ_p, Σ_{vp}.

Кинематические условия на Σ_v в зависимости от свойств среды могут сводиться либо к заданию полного вектора скорости $\mathbf{v}$ (или вектора перемещения $\mathbf{u}$), например на неподвижной поверхности $\Phi(\boldsymbol{x}) = 0$ — *условие полного сцепления* (прилипания):

$$\text{на } \Phi(\boldsymbol{x}) = 0 \;\; \mathbf{v} = 0 \;\; (\text{или } \mathbf{u} = 0), \tag{13.2}$$

либо к заданию только нормальной составляющей вектора скорости или перемещения, например

$$\text{на } \Phi(\boldsymbol{x}) = 0 \;\; \boldsymbol{\nu}\mathbf{v} = 0 \;\; (\text{или } \boldsymbol{\nu}\mathbf{u} = 0). \tag{13.3}$$

Соотношение (13.3) называется *условием непроницаемости.* Условие непроницаемости на движущейся поверхности $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ находится так: в момент $t+dt$ частица среды с координатой $\boldsymbol{x}$ в момент t будет иметь координату $\boldsymbol{x}+\mathbf{v}dt$; если она была на поверхности, т. е. $\Phi(\boldsymbol{x}, t) = 0$, то и останется на ней, т. е. $\Phi(\boldsymbol{x}+\mathbf{v}dt, t+dt) = 0$; следовательно, после вычитания и деления на dt получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}} \mathbf{v} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \tag{13.4}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости среды. Но

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}} = \operatorname{grad} \Phi, \tag{13.5}$$

и потому на основании (13.1) получаем

$$\mathbf{v}\boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{|\operatorname{grad} \Phi|} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv + v_\Phi^{(\nu)}, \tag{13.6}$$

где $v_\Phi^{(\nu)}$ — скорость движения поверхности Φ вдоль ее нормали. Условие (13.4) или (13.6) означает, что нормальная проекция скорости $\mathbf{v}$ среды совпадает с $v_\Phi^{(\nu)}$; это условие совпадает с (13.3), если $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}) = 0$. Если задано движение каждой фиксированной точки $\boldsymbol{x}$ поверхности $\Phi(\boldsymbol{x}, t) = 0$, т. е. задан вектор скорости $\mathbf{v}_\Phi(\boldsymbol{x}, t)$, то условие сцепления примет вид $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{v}_\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ на $\Phi(\boldsymbol{x}, t) = 0$, при этом автоматически выполнено условие (13.6):

$$\text{на } \Phi = 0 \;\; \mathbf{v} = \mathbf{v}_\Phi \;\; (\text{или } \mathbf{u} = \mathbf{u}_\Phi). \tag{13.7}$$

Динамические условия на Σ_p в зависимости от свойств среды могут сводиться к заданию либо нормального напряжения (давления $\mathbf{p}_\Phi^{(\nu)}$ на $\Phi = 0$):

$$\text{на } \Phi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad p = p_\Phi^{(\nu)} \tag{13.8}$$

(пример идеальной жидкости), либо к заданию полного вектора $\mathbf{P}_{\Phi}^{(\nu)}$ внешней силы (напряжения). Поскольку на любой площадке вектор внутреннего напряжения $\mathbf{P}^{(\nu)}=\mathbf{S}^i \nu_i$, то *условие в напряжениях* имеет вид:

$$\text{на } \Phi=0 \ \mathbf{P}^{(\nu)} \equiv S^{ij} \nu_i \mathbf{Э}_j \equiv \sigma^{ij} n_i \mathbf{e}_j = \mathbf{P}_{\Phi}^{(\nu)}. \qquad (13.9)$$

Смешанные условия на Σ_{vp} состоят в задании на $\Phi=0$ двух (или одной) составляющих вектора $\mathbf{v}$ и одной (или двух) составляющей вектора $\mathbf{P}^{(\nu)}$, а всего трех скалярных условий, т. е. частично — задания условий (13.7), частично — (13.9). Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три ортогональных вектора на поверхности, то три условия должны быть такими, чтобы одно относилось к направлению $\mathbf{a}$, другое — к $\mathbf{b}$, третье — к $\mathbf{c}$, т. е. не было бы двух, относящихся к одному и тому же вектору, иначе задача МСС, как правило, оказывается неопределенной.

Основные температурные граничные условия состоят либо в задании на поверхности температуры:

$$\text{на } \Phi=0 \quad T=T_{\Phi}(\boldsymbol{x}, t), \qquad (13.10)$$

либо в задании теплового потока:

$$\text{на } \Phi=0 \quad \mathbf{q}\boldsymbol{\nu}=q_{\Phi}(\boldsymbol{x}, t). \qquad (13.11)$$

Условие (13.10) возможно потому, что на границе двух однотипных сред, разделенных поверхностью $\Phi=0$, температуры бывают одинаковыми и условие (13.10) означает непрерывность температуры на $\Phi=0$. Условие (13.11), если только на поверхности $\Phi=0$ не образуется тепло, аналогично можно рассматривать как требование непрерывности теплового потока через поверхность, если же тепло образуется (например, за счет трения двух тел на поверхности $\Phi=0$), то правая часть (13.11) будет состоять из теплообразования $q_{\Phi T}$ и потока тепла от внешнего тела. Поток $q_{\Phi T}$ часто считается пропорциональным разности температуры тела T на $\Phi=0$ и температуры внешнего тела T_{Φ}:

$$q_{\Phi}=k(T-T_{\Phi}), \qquad (13.12)$$

где k называется *коэффициентом теплоотдачи*. Если твердое тело с границей $\Phi=0$ сильно нагрето, то в пустоту (приближенно — в воздух) оно отдает *лучистое тепло*; в условии (13.11) в этом случае q_{Φ} может быть взято согласно закону Стефана — Больцмана:

$$q_{\Phi}=c\left(\frac{T}{100}\right)^4,$$

где T — температура тела на поверхности (K), c — постоянная, зависящая от свойств тела. Для *абсолютно черного тела* $c_0=$

$=5{,}8$ Вт/м^2, для «серых» тел $c=\varepsilon c_0$, причем ε для разных тел имеет значения от 0,96 для окисленных шероховатых черных металлов до 0,3 для блестяще полированных.

Поскольку уравнения движения среды содержат ускорение, а уравнение теплопроводности — скорость изменения температуры, динамические задачи требуют кроме граничных условий постановки еще и *начальных условий*. В перемещениях $\overset{\circ}{\mathbf{u}}=\boldsymbol{x}-\mathfrak{x}(\boldsymbol{x}, t)=$ $=\mathbf{u}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)-\mathbf{x}$ эти условия, как и в теоретической механике, имеют вид

$$t=t_0,\ \overset{\circ}{\mathbf{u}}=\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x}),\ \mathbf{v}=\boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x}),$$

или

$$t=t_0,\ \mathbf{u}=\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{x}),\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}=\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}), \qquad (13.13)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ — заданные векторы (обычно $\boldsymbol{\varphi}_2=0$). Начальное условие для температуры

$$t=t_0,\ T=\chi'(\boldsymbol{x})=\chi'(\mathbf{x}), \qquad (13.14)$$

где χ — заданные функции координат.

Выше рассмотрены условия на поверхности $\Sigma(\Phi=0)$ являющейся границей рассматриваемой области G движения среды. В динамических проблемах МСС необходимо учитывать возможность возникновения *поверхностей разрыва* внутри области G. Такие поверхности могут возникать в средах, обладающих *упругими свойствами* (наряду с другими свойствами, отражаемыми операторами $\tilde{\mathcal{F}}$, u, $Q_{\text{т}}$, ... (§ 12)) за счет прилагаемых в какой-то момент внезапно внешних сил ($\mathbf{F}$, $\mathcal{P}^{(\nu)}$) или других воздействий (соответствующих параметрам β), и они движутся внутри G, выходя на границу Σ, отражаясь от нее или сообщая ее неподвижным участкам сильные толчки, иногда вызывая разрушения и т. п. Движение поверхностей разрыва называют *волнами разрыва* в среде. Типичными примерами являются *сейсмические* волны при землетрясениях, *ударные* волны в атмосфере от взрывов и сверхзвуковых движений летательных аппаратов.

Возможность или невозможность возникновения волн в среде полностью определяется типом присущих ей функционалов состояния $\tilde{\mathcal{F}}$ и $\tilde{Q}_{\text{т}}$ (§ 11, 12), которые в уравнениях движения и распространения тепла дифференцируются по координатам и времени. Но именно на поверхностях разрывов они могут терпеть разрывы, и потому дифференциальные уравнения должны пониматься в обобщенном смысле или заменяться интегральными. Это означает: либо решение задачи МСС, т. е. $\boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$, T, ρ..., надо искать во всей области G в виде *обобщенных функций*, либо поверхности разрывов выделить из G и включить в состав поверх-

ности Σ, на которой записываются «граничные условия», и тогда искать в получившейся области *классические* решения.

Второй путь в МСС пока является более распространенным, и потому необходимо записать особо уравнения на поверхностях разрывов.

Поверхностью (или волной) *сильного разрыва* в термомеханических задачах называется движущаяся в среде поверхность, на которой терпят разрыв тензор деформации $\widetilde{\mathscr{E}}$, температура T и, следовательно, тензор скорости деформации $\widetilde{V}$ и могут иметь разрыв функционалы $\mathscr{F}^{ij}$ уравнений состояния (12.5), т. е. тензор напряжения и функционал внутренней энергии $u[\widetilde{\mathscr{E}}, T]$, входящей в закон сохранения энергии в виде (12.10) или (12.18). В задачах с влиянием электромагнитного поля могут иметь разрыв также параметры β. Поскольку преобразование уравнений при переходе от эйлеровой к лагранжевой системе координат выяснен, рассмотрим вопрос в эйлеровом пространстве. Пусть уравнение поверхности разрыва, ее нормаль и скорость распространения вдоль нормали имеют выражения

$$H(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \mathbf{n} = \boldsymbol{\nu} = \frac{\operatorname{grad} H}{|\operatorname{grad} H|}, \quad v^{(\nu)} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial t}}{|\operatorname{grad} H|}. \qquad (13.15)$$

Индексом «1» отмечаем состояние среды перед фронтом волны, индексом «2» — за фронтом (т. е. уже возмущенное волной состояние). Поверхность $H=0$ предполагается настолько гладкой, что в окрестности точки x в момент t ее можно заменить касательной плоскостью и рассмотреть малый элемент площади ее поверхности $\Delta\Sigma_H$, одинаковый в момент t и $t+dt\,(dt=\text{const})$. За время dt в неподвижном слое объема $\Delta V_H = \Delta\Sigma_H \cdot v^{(\nu)}\,dt$ пространства наблюдателя произойдут следующие изменения: значения в момент t плотности, скорости, температуры, внутренней энергии, вектора напряжения, параметров β (следовательно, тензоров деформаций, скорости деформаций, напряжений...)

$$\begin{gathered}\rho_1 = \rho(\boldsymbol{x}, t), \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t), \quad T_1 = T(\boldsymbol{x}, t), \\ u_1 = u(\boldsymbol{x}, t), \quad \mathbf{P}_1^{(\nu)} = \sigma^{ij}(\boldsymbol{x}, t)\, n_i(\boldsymbol{x}, t)\,\mathbf{e}_j, \quad n_i = \boldsymbol{\nu}\,\mathbf{e}_i\end{gathered} \qquad (13.16')$$

скачком изменятся и получат значения

$$\rho_2 = \rho(\boldsymbol{x}, t+dt), \quad \mathbf{v}_2 = \ldots, \quad \mathbf{P}_2^{(\nu)} = \sigma^{ij}(\boldsymbol{x}, t+dt)\, n_i(\boldsymbol{x}, t)\,\mathbf{e}_j. \qquad (13.16'')$$

Подчеркнем, что $\mathbf{n}=\boldsymbol{\nu}$ и $v^{(\nu)}$ (13.15) за время t изменяется пренебрежимо мало.

Скоростью $D(\boldsymbol{x}, t)$ распространения поверхности разрыва или ударной волны в среде называется *скорость движения поверхнос-*

ти разрыва вдоль ее нормали относительно невозмущенного волной вещества, т. е. $D = v^{(\nu)} - \boldsymbol{\nu}\mathbf{v}_1$. Изменение скорости среды после прохождения волны обозначим $\mathbf{V}$; таким образом,

$$\Delta \mathbf{v} \equiv \mathbf{V} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad D = v^{(\nu)} - \mathbf{v}_1 \mathbf{n}. \tag{13.17}$$

Применим к объему ΔV_H законы сохранения (12.26)—(12.28), полагая в них $t_1 = t$, $t_2 = t + dt$. Высота цилиндра, представляющего объем ΔV_H, равна $v^{(\nu)}\, dt$ и предполагается бесконечно малой более высокого порядка сравнительно с линейным размером площади основания $\Delta\Sigma_H$:

$$v^{(\nu)}\, dt = 0\left(\sqrt{d\Sigma_H}\right), \quad \Delta V_H = v^{(\nu)}\, dt\, \Delta\Sigma_H, \tag{13.18}$$

и потому интегралами по боковой поверхности в законах сохранения можно пренебречь. На «верхнем» основании цилиндра, имеющем положительную нормаль $\boldsymbol{\nu}$, все величины имеют индекс «1» и постоянны на всем интервале времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$; на нижнем (с нормалью $-\boldsymbol{\nu}$) — также постоянны имеют индекс «2».
Из (12.26) находим

$$\Delta \rho \cdot \Delta V_H = \Delta(\rho \mathbf{v})\, \mathbf{n}\, \Delta\Sigma_H\, dt,$$

или

$$v^{(\nu)} \Delta\rho = \mathbf{n}\, \Delta(\rho \mathbf{v}). \tag{13.19}$$

В левой части (12.27) первый интеграл равен $\Delta(\rho\mathbf{v})\Delta V_H$, второй равен

$$[\rho_1 \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}) - \rho_2 \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{n})]\, dt\, \Delta\Sigma_H;$$

в правой части $\mathcal{P}^{(-\nu)} = -\mathcal{P}_2^{(\nu)}$, $\mathcal{P}^{(\nu)} = \mathcal{P}_1^{(\nu)}$, и потому первый интеграл равен $-\Delta\mathcal{P}^{(\nu)}\, dt\, \Delta\Sigma_H$, второй — порядка $\rho \mathbf{F}\, dt\, \Delta V_H$, т. е. высшего порядка малости. В результате из (12.27) получаем

$$v^{(\nu)} \Delta(\rho \mathbf{v}) - \rho_2 \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{n}) + \rho_1 \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}) = -\Delta\mathcal{P}^{(\nu)}. \tag{13.20}$$

В (12.28) интеграл, содержащий массовую силу, также отбрасывается, интеграл, содержащий параметр β, обозначим $\Omega_\beta = \Delta\Sigma_H dt$; тогда, аналогично предыдущему, из (12.28) получим

$$v^{(\nu)} \Delta\left[\rho\left(u + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right] - \mathbf{n}\,\Delta\left[\rho\left(u + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\mathbf{v}\right] =$$
$$= -\Delta(\mathcal{P}^{(\nu)}\mathbf{v}) + \mathbf{n}\,\Delta\mathbf{q} + \Omega_\beta. \tag{13.21}$$

Если величина $W_\beta + \rho q_\beta$ ограничена внутри объема ΔV_H, то $\Omega_\beta = 0$; если же она терпит разрыв на фронте волны, то может быть конечной и тогда вычисляется по формуле

$$\Omega_\beta = \frac{1}{\Delta\Sigma_H\, dt} \int\limits_t^{t+dt} d\tau \int\limits_{\Delta V_H} (W_\beta + \rho q_\beta)\, dV. \tag{13.22}$$

Уравнения — два скалярных (13.19), (13.21) и одно векторное (13.20) — называются *условиями на поверхности разрыва*, или на *ударном фронте*. Они путем алгебраических преобразований на основании (13.17) приводятся к простому виду

$$\rho_2 (D - \mathbf{n}\,\Delta \mathbf{v}) = \rho_1 D; \quad \rho_1 D \Delta \mathbf{v} = -\Delta \mathcal{P}^{(\nu)};$$
$$\rho_1 D \left[\Delta u + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{v})^2 \right] = -\mathcal{P}_2^{(\nu)} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{n} \Delta \mathbf{q} + \Omega_\beta. \tag{13.23}$$

Впрочем, (13.23) получаются из (13.19)—(13.21), если в них заменить

$$\mathbf{v}_1 \to 0, \ \mathbf{v}_2 \to \Delta \mathbf{v}, \ v^{(\nu)} \to D, \tag{13.24}$$

так как физические законы в МСС не зависят от скорости переносного движения $\mathbf{v}_1$ окрестности физической точки.

Как видно из (13.15), (13.17), функция $H(\boldsymbol{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \operatorname{grad} H = D |\operatorname{grad} H|. \tag{13.25}$$

Выбор *допустимых граничных условий* на поверхности Σ, ограничивающей область G_Σ движения среды, как и тип замкнутой системы уравнений, определяется физическими свойствами вещества среды, т. е. видом функционалов состояния $\tilde{\mathcal{F}}$, энергии u и других.

Нормальным для многих сред является *обратимый оператор* $\tilde{\mathcal{F}}$, т. е. имеющий *взаимно-однозначный обратный* относительно $\tilde{\mathcal{E}}$ в лагранжевых координатах (§ 9):

$$S^{ij} = \mathcal{F}^{ij} (\varepsilon_{mn}, T, \beta), \ \varepsilon_{ij} = \mathcal{F}_{ij}^{-1} (S^{mn}, T, \beta). \tag{13.26}$$

Таковы операторы теории упругости, вязкоупругости, пластичности (упрочняющихся материалов) и др. Нормальными для изотропных упруговязких жидкостей являются уравнения состояния, содержащие две *функции* — скалярную $p(\rho, T, \beta)$ и тензорную $f_{ij}(v_{mn}, T, \beta)$, разрешимые однозначно относительно ρ и v_{mn} (при $v_{mn} \neq 0$):

$$\sigma_{ij} = -p(\rho, T, \beta)\,\delta_{ij} + f_{ij}(v_{mn}, T, \beta),$$
$$v_{mn} = f_{mn}^{-1} (\sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \ T, \beta), \ \rho = \rho(p, T, \beta). \tag{13.27}$$

Первое из представлений (13.27) функционала $\tilde{\mathcal{F}}$ легко переписывается в лагранжевых координатах ($\rho \sqrt{g} = \rho_0$, § 11, 12) и дает выражение $\tilde{\mathcal{F}}$. Функционал $\tilde{\mathcal{F}}$ вообще говоря, также обра-

тим. В этих нормальных случаях функции $\mathcal{F}^{ij}$ (13.26) независимы между собой, функций f_{ij} (13.27) также независимы между собой, т. е. допускают обратные $\overline{\mathcal{F}_{ij}}^{1}$, $\overline{f_{ij}}^{1}$.

В особом случае идеальных жидкостей (§ 14) имеют место тождества

$$f_{ij} \equiv 0 \ (i, \ j = 1, \ 2, \ 3), \tag{13.27'}$$

следовательно, обратные операторы $\overline{f_{ij}}^{1}$ *не существуют*:

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}, \ \sigma_{ij}\,\delta_{ij} = -3p,$$
$$\mathcal{P}^{(\nu)} = \sigma_{ij}\,\nu_i\,\mathbf{e}_j = -p\,\boldsymbol{\nu}. \tag{13.28}$$

В *особом случае идеально пластических изотропных тел существует* соотношение (§ 18)

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) = \mathrm{const}, \ 3\sigma = \sigma_{ij}\,\delta_{ij}, \tag{13.29}$$

и потому оператор $\widetilde{\mathcal{F}}$ *не вполне обратим.*

Для всех сред, принимаемых в теории как *объемно-несжимаемые,*

$$\rho = \rho_0, \ A = \sqrt{g} = 1, \ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \ v_{m;n}\,\delta_{mn} = 0, \tag{13.30}$$

оператор $\widetilde{\mathcal{F}}$ *не вполне определен*, так как вследствие (13.30) не могут быть заданы *любые* процессы $(\widetilde{\mathcal{E}}, T, \beta)$ для физической частицы, а значит, и на поверхности Σ всей области тела. Интегрируя $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ по объему области V, получим

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV = \int_\Sigma \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}\,d\Sigma = 0. \tag{13.31}$$

При этом обычно существует *обусловленный обратный оператор* (согласованный с условием (13.30) и дающий однозначную зависимость $\widetilde{\mathcal{E}}$ или $\widetilde{V}$ от $(\widetilde{S}, T, \beta)$ или обусловленный прямой $\widetilde{\mathcal{F}}_1$:

$$S^{ij} - \sigma g^{ij} = \mathcal{F}_1^{ij}(\sigma, \ \widetilde{\mathcal{E}}, \ T, \ \beta), \ \mathcal{F}_1^{ij} g_{ij} = 0, \ g = 1. \tag{13.32}$$

Основной постулат МСС, утверждающий, что внутреннее состояние малой частицы вполне определяется природой среды, заданием закона изменения ее границы или сил на границе, и притока энергии ($\delta' A$, $\delta' Q_{\text{т}}$, $\delta' A_\beta$) через границу во времени, относится, конечно, и ко всей области движения среды, если учесть еще работу массовых внешних сил. Это значит, что *решение полной системы уравнений МСС при граничных условиях, правильно отражающих приток энергии и импульса непосредственно на границе, существует.*

Приток энергии дальнодействия (силы тяжести, электромагнитных сил, ...) отражается работой массовой силы F, входящей в

уравнения движения, и функциями параметров β, входящими в законы сохранения.

Движение физической границы Σ_g области в лагранжевых координатах определяется заданием закона движения ее физических точек

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_\Sigma(\mathbf{x}, t), \ \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Sigma(\alpha, \beta), \tag{13.33}$$

причем $\mathbf{x}=\mathbf{x}_\Sigma(\alpha, \beta)$ — параметрическое уравнение поверхности, на которой эти точки расположены при $t=t_0$, а $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}_\Sigma$ — ее параметрическое уравнение в момент t. Или заданием вектора скорости точек $\mathbf{v}_\Sigma(\boldsymbol{x}, t)$ на поверхности $\Phi(\boldsymbol{x}, t)=0$ эйлерова пространства

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{v}_\Sigma(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{при } \Phi(\boldsymbol{x}, t) = 0, \tag{13.34}$$

если эта поверхность известна и является физической границей Σ_g. В этом случае, как уже выяснено, $\boldsymbol{\varphi}_\Sigma$ (13.33) и есть решение уравнения $d\boldsymbol{\varphi}_\Sigma/dt = \mathbf{v}_\Sigma(\boldsymbol{\varphi}_\Sigma, t)$, и условия (13.33), (13.34) эквивалентны.

Приток тепла определяется заданием на Σ нормальной составляющей вектора потока тепла $q^\nu = q_\Sigma$ или условием на Σ

$$\mathbf{q} \operatorname{grad} \Phi - q_\Sigma |\operatorname{grad} \Phi| = 0, \tag{13.35}$$

которое может быть представлено с помощью как (13.33), так и (13.34). С точки зрения основного постулата условия (13.33) или (13.34) и (13.35) вместе с начальным условием во всей области

$$t = t_0, \ T = T_0 \tag{13.35$'$}$$

являются *естественными* для сред с обратимым функционалом $\tilde{\mathcal{F}}$, и решение термомеханических задач существует. Условия (13.34) могут быть заданы и на произвольно движущейся заданной поверхности $\Phi(\boldsymbol{x}, t)=0$.

Для обратимых операторов с точки зрения основного постулата задания $\tilde{\mathcal{E}}$ или $\tilde{S}$ эквивалентны, и потому эквивалентны в смысле существования решения задания условий (13.33) или динамических условий

$$S^{ij} \nu_i \mathbf{э}_j = \mathcal{P}^{(\nu)}_\Sigma(\mathbf{x}, t) \quad \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Sigma(\alpha, \beta); \tag{13.36}$$

или

$$\sigma_{ij} n_i \mathbf{e}_j = \mathcal{P}^{(n)}_\Sigma(\boldsymbol{x}, t) \ \text{ на } \ \Phi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{13.37}$$

с сохранением условия (13.35). Замена (13.35) условием (13.10) физически также оправдана.

Интересно сопоставление кинематических и динамических условий (13.34), (13.37) и термодинамического (13.35) с условиями на поверхности разрыва (13.23): при постоянной «массе» $\rho_1 D = \text{const}$ в невозмущенной среде $(\mathbf{v}_1 = 0, \ \mathcal{P}^{(\nu)}_1 = 0, \ \mathbf{q}_1 = 0, \ \Omega_\beta \equiv 0)$ задание скорости $\Delta\mathbf{v}$ тождественно заданию силы $\Delta\mathcal{P}^{(\nu)}$ и на-

оборот; вместе с заданием теплового потока $\mathbf{n}\Delta\mathbf{q}$ любое из этих механических условий однозначно определяет энергию Δu.

Смешанные граничные условия, о которых сказано выше, вследствие эквивалентности кинематических и динамических также им эквивалентны. Естественно, что все эти условия нетождественны, они эквивалентны в смысле возможности существования решения замкнутой системы уравнений МСС.

Особые случаи граничных условий для сред с необратимыми и не вполне обратимыми операторами $\tilde{\mathcal{F}}$ уточняются с учетом их свойств. В несжимаемых средах условия (13.34), (13.36) дополняются ограничениями (13.31) на задаваемые векторы $(\boldsymbol{\varphi}_\Sigma, \mathbf{v}_\Sigma)$ и дополнительным заданием граничного условия на σ, вытекающим из (13.32):

$$\sigma = \mathcal{P}^{(n)}\mathbf{n} \equiv N_n \quad \text{на } \Phi = 0. \tag{13.38}$$

При условиях (13.34), (13.31) дополнительно должно быть задано нормальное натяжение N_n на поверхности. При условиях (13.37) $\sigma(\boldsymbol{x}\ t)$ является новой искомой функцией, и ей соответствует уравнение несжимаемости

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \text{ или } g = 1, \tag{13.39}$$

и условие (13.38) на границе, вытекающее из (13.37). В идеальных жидкостях сообщаемая через границу Σ мощность механических сил сводится только к работе нормального давления p на нормальной составляющей вектора скорости. Поэтому условия (13.34) сводятся к заданию одного скаляра $v_{\Sigma n}$

$$\mathbf{nv} = v_{\Sigma n}(\boldsymbol{x}, t) \text{ на } \Phi = 0, \tag{13.40'}$$

а условия (13.37) на основании (13.28) приводятся к виду (13.38), причем $\sigma = -p$ и задан скаляр N_n:

$$p = -N_n \text{ на } \Phi = 0. \tag{13.40''}$$

В случае идеально пластической среды кинематические условия (13.33), (13.34) сохраняются и решение замкнутой системы должно существовать в силу основного постулата; по той же причине при условиях (13.37) статическое решение (§ 18) при *произвольных* нагрузках $\mathcal{P}^{(n)}$ не существует на основании (13.29).

Закончим общими замечаниями о краевой задаче МСС. Каждое из уравнений замкнутой системы и из граничных и начальных условий термомеханической задачи можно рассматривать как равенство нулю компоненты некоторого многомерного вектора — оператора A над двумя функциями $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$ по параметрам $\mathbf{x}$, t в ограниченной области их изменения

$$\mathbf{x} \in [G(t), \Sigma(t)], \quad t_0 \leqslant t \leqslant t' < t_1. \tag{13.40}$$

Для обратимых операторов $\tilde{\mathcal{F}}$ компонентами $\mathbf{A}^1=0$, $A^2=0$ вектора $\mathbf{A}=0$, относящимися к области параметров (13.40), исключая Σ, являются одно (векторное) уравнение движения и одно уравнение теплопроводности. Компонентами $\mathbf{A}^3$, A^4 из области (13.40), исключая $G(t)$, — одно граничное условие (векторное) и одно условие притока тепла. Компонентами $\mathbf{A}^5$, $\mathbf{A}^6$, A^7 из области изменения параметров (13.40) при $t=t_0=\text{const}$ являются начальные условия для $\boldsymbol{\varphi}$ и T: при $t=t_0$

$$\mathbf{A}^5\equiv\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{x})=0,$$

$$\mathbf{A}^6\equiv\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}-\dot{\boldsymbol{\varphi}}_0(\mathbf{x})=0,\ \ A^7\equiv T-T_0=0.$$

Если обозначим $\boldsymbol{\eta}\,(\boldsymbol{\eta}_1,\ \eta_2,\ \boldsymbol{\eta}_3,\ \eta_4,\ \boldsymbol{\eta}_5,\ \boldsymbol{\eta}_6,\ \eta_7)$ произвольный неортогональный A вектор с компонентами, определенными в соответствующих областях изменения параметров $\mathbf{x}$, t, то все семь (15 скалярных) уравнений запишутся в виде

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x},\ t)\,\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi},\ T)=0. \tag{13.41}$$

Наиболее просты *линейные* задачи, для которых оператор A линейный относительно $(\boldsymbol{\varphi},\ T)$, так как для таких задач наиболее развиты точные методы решения. В общем случае распространен метод *линеаризации* на основе *уравнения* (13.41) в *вариациях*: если некоторое решение $\boldsymbol{\varphi}^0(\mathbf{x},\ t)$, $T^0(\mathbf{x},\ t)$ уравнения (13.41) известно, то разыскивается *близкое* решение $\boldsymbol{\varphi}^1$, T^1, удовлетворяющее уравнению

$$\boldsymbol{\eta}\,\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi}^0,\ T^0;\ \delta\boldsymbol{\varphi},\ \delta T)=0, \tag{13.42}$$

причем

$$\mathbf{L}\equiv\delta\mathbf{A}=\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}^1,\ T^1)-\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}^0,\ T^0)=$$
$$=\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}^0+\delta\boldsymbol{\varphi},\ T^0+\delta T)-\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}^0,\ T^0).$$

Для уравнений МСС с обратимым $\tilde{\mathcal{F}}$ оператор $\mathbf{L}$ будет линейным относительно $\delta\boldsymbol{\varphi}$, δT. Эту процедуру иногда удается применить многократно и построить последовательность $(\boldsymbol{\varphi}^1,\ T^1),\ldots(\boldsymbol{\varphi}^n,\ T^n)$, сходящуюся к решению уравнения (13.41). Формальное доказательство теоремы существования для уравнения (13.41) во многих случаях является сложной задачей. Вопрос о единственности решения в определенной мере связан с решением уравнения в вариациях (13.42). Если заданные функции, входящие в уравнение $\boldsymbol{\eta}\mathbf{A}=0,(\boldsymbol{\varphi}_0,\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0,\ \mathbf{x}_\Sigma\ldots)$ не варьируются, то уравнение в вариациях $\boldsymbol{\eta}\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi}_0,\ T^0,\ \delta\boldsymbol{\varphi},\ \delta T)=0$ по определению $\boldsymbol{\varphi}^0$, T^0 имеет нулевое решение: $\delta\boldsymbol{\varphi}=0$, $\delta T=0$. Но если существует еще и решение, не равное тождественно нулю, то заключают о возможной неединственности и *неустойчивости решения* $\boldsymbol{\varphi}^0$, T^0 и неустойчивости самого движе-

ния среды. Это грубо обоснованное заключение в большинстве случаев оправдывается в опыте. Строгая постановка исследования устойчивости решения уравнений (13.41) принадлежат к числу современных вопросов, не получивших общего решения.

Каждая компонента вектора **A** вместе с соответствующей компонентой $\boldsymbol{\eta}$ имеет свою определенную область изменения параметров **x**, t, например $\mathbf{A}^1$, A^2, $\boldsymbol{\eta}_1$, η_2 имеют область $\mathbf{x}\in G$, $t\in(t_0\sim t_1)$ и т. д. Если интегралом $\eta\mathbf{A}$ по области его определения назвать сумму интегралов от произведений его компонент A^k на соответствующие компоненты η_k, из которых каждый взят по «объему» соответствующей области определения Ω^k, то уравнение (13.41) можно заменить обобщенным уравнением

$$\int\limits_{\Omega} \eta\, A d\Omega = 0. \tag{13.43}$$

Отсюда следует (13.41) не только при совершенно произвольном η, но и η в виде некоторого оператора по **x**, t над произвольными вариациями искомых функций. Это приводит к вариационной постановке задач МСС.

Глава IV
КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ. АЭРОГИДРОДИНАМИКА И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Простейшие в МСС тела — идеальные и классические (ньютоновские) жидкости, идеально упругие твердые тела. Эти тела (идеализированные схемы, модели реальных тел) обладают фундаментальными свойствами реальных жидких и твердых тел, причем свойства, во многих случаях второстепенные, не учитываются. Опыт показывает, что поведение многих реальных жидкостей, газов и твердых тел в определенных условиях достаточно точно описывается уравнениями механики сплошной среды, построенными для указанных идеальных тел (моделей). Методическое значение моделей состоит еще и в том, что из сопоставления с опытом получается возможность изучения отклонений свойств реальных тел от свойств моделей и, значит, возможность уточнения теории.

Жидкостями в механике сплошной среды называются тела, сопротивление которых сдвигу при любой деформации стремится к нулю, если скорости деформации равны нулю в течение достаточно большого промежутка времени ($t \to \infty$).

Твердыми телами в механике сплошной среды называются тела, сопротивление сдвигу которых при постоянных во времени значениях компонент тензора деформации остается отличным от нуля и конечным в течение сколь угодно большого интервала времени ($t \to \infty$).

Бесконечный интервал времени в опытах не реализуется, и фактически речь идет об интервалах, значительно превосходящих времена релаксации. Для некоторых тел эти времена ничтожны, для других — очень велики.

Напряженное состояние малой частицы любой среды в любой момент t характеризуется тензором напряжения $\widetilde{S}$, который в главных осях напряжений всегда имеет диагональную матрицу

$$\begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Vmatrix}.$$

Экстремальные касательные напряжения, действующие в этой частице в момент t по плоскостям, делящим пополам углы между плоскостями главных напряжений, равны

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

По определению рассматриваемая частица будет частицей жидкости, если при $\widetilde{\mathscr{E}} = \text{const}$ и $t \to \infty$ $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, т. е.

$$t \to \infty, \ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p_\infty,$$

или частицей твердого тела, если при $\widetilde{\mathscr{E}} = \text{const}$

$$t \to \infty, \ |\tau_{\alpha\beta}|_{\max} \geqslant \tau_\infty > 0,$$

т. е., вообще говоря, при $t \to \infty$ $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq \sigma_1$.

Классические теории относятся только к термомеханическим процессам.

§ 14. Идеальные жидкости и газы

Идеальная жидкость (газ) — это среда, в которой рассеяние отсутствует ($w^* = 0$) и сдвиговые сопротивления которой при любой деформации и скорости деформации в любой момент времени равны нулю, т. е. для любого t

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p. \tag{14.1}$$

Поскольку главные оси напряжений всегда взаимно ортогональны, то на косой площадке с нормалью $\mathbf{v}(l_1, l_2, l_3)$ вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}_v = \mathbf{P}^{(v)}$ равен

$$\boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\sigma}_1 l_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 l_2 + \boldsymbol{\sigma}_3 l_3 = -p\mathbf{v}, \tag{14.2}$$

т. е. он направлен по нормали к площадке и имеет величину $-p$. Следовательно, давление p по всем площадкам, в данный момент проходящим через данную точку среды, одинаково. Обычно предполагается, что $p \geqslant 0$, т. е. это всегда действительно давление. Однако реальные жидкости могут выдерживать и некоторые всесторонние растягивающие напряжения ($p < 0$), и в понятие идеальной жидкости мы не будем включать обязательного требования $p \geqslant 0$.

В эйлеровых ортогональных декартовых координатах x_i ($i = 1, 2, 3$) тензор напряжений в идеальной жидкости имеет простейшее выражение

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}. \tag{14.3}$$

Уравнения движения сплошной среды в рассматриваемых координатах

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho(X_i-w_i)=0,$$

с учетом того, что

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij}=-\frac{\partial p}{\partial x_i},\quad w_i=\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

принимают вид

$$\rho\frac{dv_i}{dt}-\rho X_i=-\frac{\partial p}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{14.4}$$

или любую из двух векторных форм

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\rho\mathbf{F}=-\operatorname{grad}p. \tag{14.5}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{v}^2-\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=\mathbf{F}.$$

Они называются *динамическими уравнениями Эйлера.* К ним должно быть присоединено уравнение сохранения массы

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0. \tag{14.6}$$

Система (14.5), (14.6) есть система совместных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно вектора скорости $\mathbf{v}$ и скаляров p (давления) и ρ (плотности). Это незамкнутая система, так как для пяти функций координат и времени v_1, v_2, v_3, p, ρ она дает только четыре уравнения указанного типа.

Динамические уравнения Эйлера можно записать также в лагранжевых координатах. Пусть, как и ранее $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\mathbf{x},\ t)$ — закон движения частицы, причем $\mathbf{x}=\mathrm{x}_i\mathbf{e}_i$ — ее начальный декартов радиус-вектор, а

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)$$

ее текущий радиус-вектор. Поскольку в момент t лагранжева система координат $\mathrm{x}_j=\mathrm{const}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ является, вообще говоря, криволинейной, ковариантные и контравариантные базисы и метрические тензоры определяются законом движения и (6.15), (6.23)

$$\boldsymbol{\mathfrak{z}}_i=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\mathrm{x}_i}=\mathbf{e}_j\frac{\partial x_j}{\partial\mathrm{x}_i},\ g_{ij}=\frac{\partial x_k}{\partial\mathrm{x}_i}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial\mathrm{x}_j}=\delta_{ij}+2\varepsilon_{ij},\ \ldots, \tag{14.7}$$

т. е. $\boldsymbol{\mathfrak{z}}_i$, $\boldsymbol{\mathfrak{z}}^i$, g_{ij}, g_{ij} выражаются через частные производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial\mathrm{x}_k}$.

За искомые функции можно принять либо $x_i(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \mathrm{x}_3,\ t)$, либо $u_i(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \mathrm{x}_3,\ t)$, причем g_{ij} и g^{ij} алгебраически выражаются через компоненты тензора деформации.

Найдем выражения контравариантных компонент S^{ij} тензора напряжений $\widetilde{S}$ в момент t в базисе $\mathbf{э}_i$. По определению идеальной жидкости вектор истинного напряжения на площадке, построенной на векторах $\mathbf{э}_2$ и $\mathbf{э}_3$, направлен по нормали к ней (а направление нормали совпадает с $\mathbf{э}^1$) и равен давлению p, т. е.

$$\mathbf{P}^{(1)} = -p\,\frac{\mathbf{э}^1}{|\mathbf{э}^1|} = -\frac{p\mathbf{э}^1}{\sqrt{g^{11}}}.$$

Аналогичные выражения получим для $\mathbf{P}^{(2)}$ и $\mathbf{P}^{(3)}$. Вектор напряжения $\mathbf{S}^1$ равен

$$\mathbf{S}^1 = \mathbf{P}^{(1)}\sqrt{g^{11}} = -p\mathbf{э}^1;$$

аналогично выражаются $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}^3$.

Следовательно,

$$\mathbf{S}^i = S^{ik}\mathbf{э}_k = -p\mathbf{э}^i. \tag{14.8}$$

Умножая это равенство на $\mathbf{э}^j$ и учитывая (14.7), получим

$$S^{ij} = -pg^{ij}. \tag{14.9}$$

Соотношения (14.9), представляют просто преобразования соотношений (14.3) от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\mathbf{э}^i$. Уравнения движения сплошной среды в лагранжевых координатах, имеющие вид

$$\nabla_j S^{ij} + \rho\,(F^i - w^i) = 0,$$

преобразуем, учитывая (14.7), (14.9) и очевидные соотношения

$$\nabla_j\,(pg^{ij}) = g^{ij}\nabla_j p = g^{ij}\,\frac{\partial p}{\partial \mathrm{x}_j},$$

$$F^i = \mathbf{F}\mathbf{э}^i = g^{ij}\mathbf{F}\mathbf{э}_j = g^{ij}X_k\,\frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_j},$$

$$w^i = \mathbf{w}\mathbf{э}^i = g^{ij}W_k\,\frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_j} = g^{ij}\,\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_j}, \tag{14.10}$$

где X_k, W_k — декартовы компоненты (в репере $\mathbf{e}_i$) векторов массовой силы и ускорения. Имеем

$$-g^{ij}\,\frac{\partial p}{\partial \mathrm{x}_j} + \rho g^{ij}\left(X_k - \frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_j} = 0.$$

Отсюда, умножая на g_{im}, получаем лагранжеву форму уравнений движения идеальной жидкости

$$\frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_i}\left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} - X_k\right) + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial \mathrm{x}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{14.11}$$

Здесь, конечно,

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}. \quad \frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_i} = \delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial \mathrm{x}_i}.$$

Уравнение сохранения массы имеет вид

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sqrt{g}, \text{ или } \frac{\rho_0}{\rho} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{x}_j} \right| = A. \qquad (14.12)$$

Мы снова получили незамкнутую систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных для пяти функций координат x_i и времени t: x_1, x_2, x_3 (или u_1, u_2, u_3), p, ρ. Эти уравнения имеют второй порядок по t (относительно $\boldsymbol{x}$) и первый — по x_i (относительно $\boldsymbol{x}$, p).

Идеальная несжимаемая жидкость — это идеальная жидкость, плотность каждой малой частицы которой во времени не изменяется. Если при $t=t_0$ плотность ρ_0 была постоянной, то она в несжимаемой жидкости останется постоянной и при $t>t_0$; такая жидкость называется *однородной*. Если при $t=t_0$ $\rho_0=\rho_0(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$, то она такой останется и при $t>t_0$, т. е. $\rho=\rho_0(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$ *. Уравнения движения в форме Эйлера и условие несжимаемости в эйлеровом пространстве имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{F} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad (14.13)$$

и представляют собой замкнутую систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных для четырех функций координат и времени: v_1, v_2, v_3, p.

В форме Лагранжа уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_i}\left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} - X_k\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial \mathrm{x}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (14.14)$$

$$g \equiv |g_{ij}| = 1, \text{ или } \left| \frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{x}_j} \right| = A = 1.$$

Идеальная баротропная жидкость — это идеальная сжимаемая жидкость (газ), давление p в которой — определенная функция плотности ρ

$$p = p(\rho), \qquad (14.15)$$

причем

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} > 0, \quad \frac{dc}{d\rho} \geqslant 0. \qquad (14.16)$$

Величина $c = \sqrt{\dfrac{dp}{d\rho}}$ называется *скоростью звука*.

* В этом случае жидкость называется *неоднородной*.

В начале курса на примере идеального газа мы уже встречались с уравнением состояния $p=R\rho T$, которое для изотермических процессов совпадает с (14.15), причем $p(\rho)$ есть однородная линейная функция, а для адиабатических — приводится к виду (14.15), причем $p(\rho)$ — степенная функция с показателем $\gamma>1$, так что в обоих случаях

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \quad \gamma \geqslant 1. \tag{14.17}$$

Уравнения движения и сохранения массы (14.5), (14.6) (в эйлеровых координатах) или (14.11), (14.12) (в лагранжевых) замыкаются для баротропной жидкости пятым соотношением (14.15).

Введением функции давления при потенциальной силе $\mathbf{F}$

$$P(\rho) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{c^2}{\rho}\, d\rho, \quad \mathbf{F} = -\operatorname{grad} \mathcal{F}_\rho \tag{14.18}$$

из (14.4), (14.5) получаем замкнутую систему для $\mathbf{v}$, ρ

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \operatorname{grad} P(\rho) = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{14.19}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(P + \mathcal{F}_\rho + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Аналогичная система в лагранжевых координатах получается из уравнений (14.11), (14.12).

Для слабо сжимаемых жидкостей при небольших давлениях скорость звука c в ряде случаев может считаться постоянной. При этом $P=c^2 \ln \rho$; уравнения сохранения массы и динамические уравнения будут содержать только функции $\mathbf{v}$ и P, причем

$$\frac{1}{c^2}\frac{dP}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Идеальный разреженный газ — это идеальная жидкость, подчиняющаяся уравнению состояния Клапейрона *

$$p = R\rho T, \tag{14.20}$$

причем внутренняя энергия единицы массы прямо пропорциональна температуре:

$$u = c_v T = \frac{c_v}{R}\frac{p}{\rho}. \tag{14.21}$$

В начале курса (§ 3) доказано, что такими свойствами обладает одноатомный газ при давлениях, не превышающих сотен атмо-

* Для такой жидкости употребляется еще название — *совершенный газ.*

сфер, причем в системе CGS постоянная $c_v = \frac{3k}{2m}$(k — постоянная Больцмана, m — масса атома), $R = \frac{k}{m}$.

Многие инертные газы с достаточным приближением подчиняются уравнениям (14.20), (14.21). Например, для воздуха $R = 2{,}87 \cdot 10^4$ см²/с²·К.

Уравнение (14.20) представляет собой соотношение между напряжениями и деформациями для рассматриваемого тела. Выражение внутренней энергии u (14.21) через два единственных для этой среды независимых параметра состояния ρ и T (u от ρ не зависит) получено в статистической механике и из опыта.

Запишем закон сохранения энергии

$$\rho \delta u = \delta' Q + S^{ij} \delta \varepsilon_{ij}.$$

Так как

$$v_{ij} \delta_{ji} = v_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{v},$$

то из (10.24)

$$S^{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} v_{ij} \delta t = -p \operatorname{div} \mathbf{v} dt.$$

Из (14.6)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Учитывая все это, закон сохранения энергии запишем в виде

$$\rho \delta u = \delta' Q + p \frac{\delta \rho}{\rho}, \text{ или } c_v \rho \delta T = \delta' Q + p \frac{\delta \rho}{\rho}. \tag{14.22}$$

Отсюда следует, что c_v — коэффициент теплоемкости при постоянном объеме ($\rho = \text{const}$). Внося в (14.22) соотношение

$$\delta \ln \rho = \delta \ln p - \delta \ln T,$$

являющееся следствием формулы (14.20), получим

$$\rho (c_v + R) \delta T = \delta' Q + \delta p, \tag{14.23}$$

т. е. $c_v + R$ есть коэффициент теплоемкости c_p при постоянном давлении ($p = \text{const}$). Таким образом, получилась формула Майера

$$c_p - c_v = R. \tag{14.24}$$

Из первого и второго законов термодинамики следует

$$\rho (\delta u - T \delta s) = p \frac{\delta \rho}{\rho},$$

откуда с учетом (14.21) имеем

$$\delta s = \frac{c_v \delta T}{T} - R\frac{\delta\rho}{\rho},$$

т. е. определяется энтропия

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const}, \tag{14.25}$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ — число Пуассона (для воздуха $\gamma = 1{,}4$).

К неизвестным функциям $\mathbf{v}$, p, ρ, входящим в незамкнутую систему уравнений Эйлера (14.5) и (14.6), добавилась еще одна функция — температура T или энтропия s, связанные с p, ρ соотношениями (14.20) и (14.25). Но теперь закон сохранения энергии дает еще одно дифференциальное уравнение

$$\rho\frac{du}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{q} - p\frac{d\ln\rho}{dt} = 0. \tag{14.26}$$

Поток тепла $\mathbf{q}$ для большинства изотропных сред связан с полем температуры T законом Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \tag{14.27}$$

где λ — коэффициент теплопроводности, вообще говоря, известным образом зависящий от T. Внося значения u (14.21) и $\mathbf{q}$ (14.27) в (14.26) и используя уравнение сохранения массы (14.6), получим *уравнение теплопроводности*

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + p \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{14.28}$$

Теперь система уравнений (14.5), (14.6), (14.20) и (14.28) для вектора $\mathbf{v}$ и скаляров p, ρ, T стала замкнутой для рассматриваемого идеального газа. Вместо T за искомую функцию можно принять u или s или другую, выражающуюся через p, ρ, T термодинамическую функцию, например *энтальпию* (теплосодержание) $i = c_p T$.

Если при значительных скоростях движения газа пренебречь теплопроводностью (считать процесс деформации частицы адиабатическим), то в (11.22) $\delta' Q = 0$ и, значит, энтропия частицы будет постоянной во времени (но может быть различной у разных частиц). Из (14.25) при $s = \text{const}$ получаем

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma,$$

т. е. возвращаемся к баротропной жидкости.

Если энтропия s имеет различные постоянные значения для различных физических частиц, то для таких адиабатических процессов система уравнений Эйлера вместе с условием сохранения массы замыкается соотношением (14.25) и условием

$$\frac{ds}{dt}=0. \tag{14.29}$$

На фронте ударной волны из (13.23), (14.21) при $\mathbf{n}\Delta\mathbf{q}=0$, $\Omega_\beta=0$ получаем *адиабату Гюгонио* и из (14.25) — условие существования волны $\Delta S=S_2-S_1\geqslant 0$:

$$\pi=\frac{r-\varkappa}{1-\varkappa r}\geqslant r^\gamma\geqslant 1,\ \pi=\frac{p_2}{p_1},\ r=\frac{\rho_2}{\rho_1},\ \varkappa=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \tag{14.30}$$

Граничное условие в задачах § 14 имеет вид (13.40′) или (13.40″), начальные условия — вид (13.13), т. е. задают начальное поле $\mathbf{v}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{v}$.

Если $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$ при $t=t_0$, то $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$ для любого t (*теорема Лагранжа*) и движение потенциально (7.39), $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi$, и потому из (14.19) получается *интеграл Лагранжа* и уравнение сохранения массы в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2+P(\rho)+\mathcal{F}_\rho=C(t),$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\operatorname{grad}\rho)(\operatorname{grad}\varphi)+\rho\Delta\varphi=0. \tag{14.31}$$

Если движение установившееся ($\partial\mathbf{v}/\partial t\equiv 0$), то и при вихревом ($\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq 0$) движении имеется *интеграл Бернулли* вдоль линии тока (§ 5):

$$P(\rho)+\frac{\mathbf{v}^2}{2}+\mathcal{F}_\rho=\mathrm{const}. \tag{14.32}$$

§ 15. Вязкие жидкости

Классическая вязкая жидкость — это изотропная жидкость (вообще говоря, сжимаемая), сдвиговое сопротивление которой отлично от нуля и линейно зависит от скорости деформации сдвига; термодинамическими параметрами состояния являются плотность ρ и температура T.

Таким образом, в вязкой жидкости тензор напряжений $\widetilde{S}$ есть линейная функция тензора скорости деформации $\widetilde{V}$. Общее соотношение имеет вид

$$\widetilde{S}=\Pi\widetilde{G}+2\mu\widetilde{V},\quad \Pi=-p+\lambda\operatorname{div}\mathbf{v}, \tag{15.1}$$

где П — скаляр, $\widetilde{G}$ — метрический тензор, μ, λ — коэффициенты вязкости, которые не зависят от деформаций и скоростей. Поэтому их называют «постоянными», хотя они могут зависеть от температуры.

Движение вязкой жидкости обычно рассматривается в эйлеровом пространстве. В таком случае из (15.1) получаем в декартовых координатах

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}\delta_{ij} + 2\mu v_{ij}, \tag{15.2}$$

причем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \tag{15.3}$$

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Обозначим, как обычно, $3\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}$ и, свертывая (15.2) с δ_{ij}, получим выражение скаляра

$$\Pi = \sigma - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v} = -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}$$

и связь между σ и p:

$$\sigma = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} \mathbf{v}. \tag{15.4}$$

Отсюда следует, что в общем случае среднее напряжение $\sigma = 1/3\sigma_{ij}\delta_{ij}$ есть линейная неоднородная функция скорости деформации объема $\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{ij}\delta_{ij}$

$$\sigma = -p + \lambda' \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \lambda' = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{15.5}$$

Вводя компоненты девиаторов (7.29′), (8.43)

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} - 1/3\,\sigma\delta_{ij}, \\ \widetilde{v}_{ij} &= v_{ij} - 1/3 \operatorname{div} \mathbf{v}\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{15.6}$$

из соотношений (15.2) получим

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = 2\mu\widetilde{v}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{15.7}$$

Соотношения (15.2) тождественны соотношениям (15.5), (15.7), но последние имеют более ясный физический смысл, так как (15.5) означает линейный закон вязкости объемного сопротивления, и потому $\lambda' = \lambda + 2/3\,\mu$ есть коэффициент объемной вязкости, а (15.7) означает линейный закон вязкости сдвигового сопротивления, и потому μ есть коэффициент сдвиговой вязкости. Действительно,

приводя соотношения (15.7) к главным осям ($\tilde{\sigma}_1 = 2\mu\tilde{v}_1, \ldots$) и вычитая их попарно, получим для экстремальных касательных напряжений $\tau_{12} = 1/2(\sigma_1 - \sigma_2), \ldots$ и экстремальных скоростей сдвигов $\dot{\gamma}_{12} = \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2, \ldots$ соотношения

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu\dot{\gamma}_{\alpha\beta}.$$

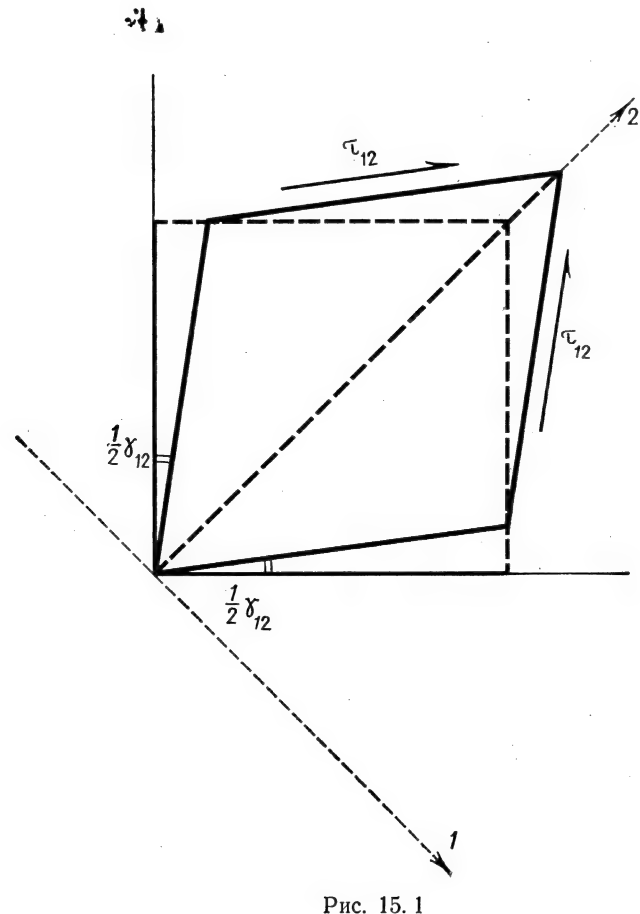


Рис. 15. 1

На рис. 15.1 пунктиром показано сечение элемента жидкости в момент t, выбранного в виде кубика в главных осях так, что две грани нормальны к главному направлению «3», а четыре другие делят пополам углы между главными направлениями «1» и «2» (эти направления показаны пунктиром). Через момент dt за счет напряжений τ_{12} произойдут малые сдвиги $1/2\,\gamma_{12} = 1/2\,\dot{\gamma}_{12}dt$.

Каждое из изображенных касательных напряжений пропорционально полной скорости сдвига:

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{12} + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{12} \right) = \mu \dot{\gamma}_{12}.$$

Другое пояснение закона вязкого трения (15.7) получим, если рассмотрим плоскопараллельное течение, определяемое полем скоростей

$$v_1 = A + Bx_2, \; v_2 = 0, \; v_3 = 0$$

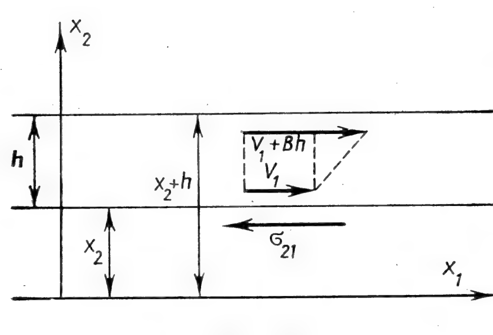


Рис. 15.2

(A, B — постоянные).

На рис. 15.2 показаны две плоскости, расположенные на расстоянии h; верхняя плоскость, по которой действует касательное напряжение σ_{12}, движется относительно нижней со скоростью $v_1(x_2+h) - v_1(x_2) = Bh \approx \Delta v_1$. Относительная скорость сдвига плоскостей $\Delta v_1/h = B$ представляет единственную, отличную от нуля компоненту тензора $\widetilde{V}$ ($v_{11} = v_{22} = v_{33} = v_{13} = v_{23} = 0$, $v_{12} = 1/2\, B$). Из (15.7) имеем $\sigma_{12} = \mu B = \mu \; \Delta v_1/h$, т. е. касательное напряжение пропорционально градиенту скорости v_1 по оси x_2. Физическую природу вязкого трения в газах и жидкостях можно разобрать на примере рассматриваемого случая. В молекулярном движении каждая молекула имеет отличные от нуля скорости $v_{1ист}$, $v_{2ист}$ и за счет этого молекулы, движущиеся со скоростью $v_{2ист}$ от нижней плоскости к верхней, ускоряются (вдоль оси x_1), а молекулы, движущиеся в обратном направлении, замедляются пропорционально Δv_1 и, значит, для реализации макроскопического движения слоя h со средними скоростями $v_1 = A + Bx_2$, $v_2 = 0$ необходимо приложить на плоскостях силы σ_{21}, пропорциональные Δv_1.

Соотношения (15.5), (15.7) доказываются в кинетической теории газа на основании (2.41″) или (2.66), так как в вязких газах тензор $\widetilde{S}$ определяется только кинетическими составляющими и $\sigma^{\alpha\beta}_{кинет}$; для одноатомного газа объемный коэффициент вязкости $\lambda' = 0$, т. е.

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu. \tag{15.8}$$

Для других газов, а также сжимаемых жидкостей соотношение (15.8), вообще говоря, не имеет места.

Уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости в декартовых координатах x_i эйлерова пространства получаются из уравнений движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \left(X_i - \frac{dv_i}{dt} \right) = 0$$

подстановкой σ_{ij} из соотношений (15.2)

$$\rho \left(\frac{dv_i}{dt} - X_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (15.9)$$

Если в области течения λ и μ можно считать постоянными, то из (15.9) получаются уравнения Навье — Стокса:

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{F} \right) = -\operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v}, \qquad (15.10)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$ — оператор Лапласа. Действительно, так как

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \Delta v_i,$$

а

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \mathbf{v}),$$

то (15.9) примет вид

$$\rho \left(\frac{dv_i}{dt} - X_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \Delta v_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

откуда и следует (15.10).

Уравнение сохранения массы

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

вместе с уравнениями Навье — Стокса представляют незамкнутую систему четырех дифференциальных уравнений для пяти функций (v_1, v_2, v_3, ρ, p).

Движение вязкой жидкости сопровождается диссипацией механической энергии. Согласно теореме живых сил работа внешних сил $\delta' A$ за время dt не полностью переходит в кинетическую энергию dK. Для $\delta' A$ имеем согласно (10.29)

$$\delta' A = dK + \int\limits_V R \, dt \, dV,$$

причем в данном случае работа напряжений в единицу времени будет

$$R = \sigma_{ij} v_{ij} = - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu v_{ij} v_{ij} = \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + R_{\text{вязк}}, \tag{15.11}$$

где мощность вязких сил $R_{\text{вязк}}$ определяется соотношением

$$R_{\text{вязк}} = \lambda (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu v_{ij} v_{ij} = (\lambda + 2/3\,\mu)(\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2\mu \tilde{v}_{ij} \tilde{v}_{ij}. \tag{15.12}$$

Предполагается, что $R_{\text{вязк}}$ превращается в тепло, т. е. $w^* = R_{\text{вязк}}$. Согласно второму закону термодинамики

$$\rho T \delta s - \delta' Q = w^* dt \geqslant 0, \tag{15.13}$$

и поэтому коэффициенты вязкости $\lambda' = \lambda + 2/3\,\mu$, μ неотрицательны.

Рассмотрим дифференциальные уравнения движения *вязкой несжимаемой жидкости.* Уравнения Навье — Стокса и условие несжимаемости (при $\mu = \text{const}$, $\rho = \text{const}$)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{F} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{15.14}$$

представляют замкнутую систему дифференциальных уравнений для $\mathbf{v}$ и p. Их следствие при $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathcal{F} \rho$ и замене $d\mathbf{v}/dt$ (10.14) дает уравнение распространения вихря

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}) = \nu \Delta \mathbf{\Omega}. \tag{15.14'}$$

Работа напряжений в единице объема за единицу времени совпадает с рассеянием w^*:

$$R = w^* = 2\mu v_{ij} v_{ij} = 2\rho\nu v_{ij} v_{ij}. \tag{15.15}$$

Величина $\nu = \mu/\rho$ называется *кинематическим коэффициентом вязкости.* Значения ν для некоторых жидкостей и газов приведены в табл. 4.

Коэффициент вязкости μ газов почти не зависит от давления, а ν убывает обратно пропорционально давлению. Если вязкость несжимаемой жидкости зависит от температуры ($\rho = \text{const}$, $\mu = \mu(T)$), то уравнения движения имеют вид

$$\frac{dv_i}{dt} - F_i = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i + 2\nu' v_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \nu' = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\mu}{dT}. \tag{15.16}$$

Таблица 4

Жидкость	Температура, °C	ν, см²/с
Вода	0 20 50	0,0178 0,100 0,0056
Ртуть	0 100	0,00125 0,00091
Глицерин	20	6,80
Воздух (давление = 10⁵ Па)	0 20 100	0,133 0,150 0,243

Из основных термодинамических равенств

$$\rho\delta u = \delta' Q + w^*\delta t, \quad T\rho\delta s = \delta' Q + w^*\delta t$$

следует $du = Tds$, причем $u = u(T)$, $s = s(T)$. Считая теплоемкость покоящейся жидкости постоянной, т. е.

$$\text{при } v_{ij} = 0 \quad \delta' Q = \rho c_v \delta T,$$

находим

$$u = c_v T + \text{const}, \quad s = c_v \ln T + \text{const},$$

и потому уравнение энергии дает (при законе теплопроводности Фурье и постоянной теплопроводности Λ) уравнение

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \Delta T + \frac{\nu}{c_v} v_{ij} v_{ij}, \quad a = \sqrt{\frac{\Lambda}{\rho c_v}}. \tag{15.17}$$

Система уравнений (15.16), (15.17) для v_1, v_2, v_3, p, T замкнута и определяет движение вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости.

В случае вязкого разреженного газа уравнения Навье — Стокса в виде (15.9) и условие неразрывности

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

могут быть дополнены уравнением состояния $p = p(\rho, T)$ и уравнением энергии (при известной $u(\rho, T)$)

$$\rho \frac{du}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - p \operatorname{div} \mathbf{v} + w^*,$$

где w^* имеет вид (15.12). Это уравнение — обобщение уравнений (14.28) и (15.17). Система замкнута для функций v_1, v_2, v_3, p, ρ, T.

Выведем *уравнения движения вязкой жидкости в лагранжевых координатах* x_1, x_2, x_3, принимая за искомые функции $x_i = x_i(\text{x}_1, \text{x}_2, \text{x}_3, t)$ (или $u_i = x_i - \text{x}_i$) и имея в деформированном состоянии (в момент t) «вмороженные» криволинейные координаты x_i, базисы и метрические тензоры (§ 6)

$$\text{э}_i = A_i^k \mathbf{e}_k, \quad \text{э}^j = B_k^j \mathbf{e}_k,$$

$$A = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \text{x}_j} \right|, \quad g_{ij} = A_i^k A_j^k, \quad g^{ij} = B_k^i B_k^j.$$

Умножая (15.2) на $A_m^i A_n^j$, получим согласно (9.24)

$$S_{mn} = \Pi g_{mn} + 2\mu V_{mn}. \tag{15.18}$$

При этом, как известно, ковариантные компоненты V_{ij} тензора скорости деформации связаны с деформациями ε_{ij} соотношениями (9.33)

$$2V_{ij} = 2\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial x_k}{\partial \text{x}_i}\frac{\partial^2 x_k}{\partial \text{x}_j \partial t} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial \text{x}_i \partial t}\frac{\partial x_k}{\partial \text{x}_j}. \tag{15.19}$$

Поднимая индексы V_{ij}, получим

$$2V^{ij} = 2V_{mn} g^{im} g^{jn}$$

и, следовательно, найдем выражение закона вязкости в лагранжевых координатах для контравариантных S^{ij}

$$S^{ij} = \Pi g^{ij} + 2\mu g^{im} g^{jn} V_{mn}. \tag{15.20}$$

Контравариантные компоненты ускорения $\mathbf{w}$ и массовой силы $\mathbf{F}$ в репере э_i выражаются через x_i и X_i в ортогональном репере ($\mathbf{F} = X_i \mathbf{e}_i$) формулами (14.10)

$$\mathbf{w} = w^i \text{э}_i, \quad w^i = g^{ij}\frac{\partial x_k}{\partial \text{x}_j}\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2}, \quad F^i = g^{ij} X_k \frac{\partial x_k}{\partial \text{x}_j}, \quad \mathbf{F} = F^i \text{э}_i. \tag{15.21}$$

Внося (15.20), (15.21) в уравнения движения

$$\nabla_j S^{ij} + \rho(F^i - w^i) = 0$$

и учитывая свойства g^{ij}, g_{ij}, э_i при ковариантном дифференцировании

$$\nabla_j(\Pi g^{ij}) = g^{ij}\nabla_j \Pi = g^{ij}\frac{\partial \Pi}{\partial \text{x}_j}, \quad \nabla_j(g^{im} g^{jn} V_{mn}) = g^{im} g^{jn} \nabla_j V_{mn},$$

$$\nabla_j V_{mn} = \frac{\partial V_{mn}}{\partial \text{x}_j} - \Gamma_{jm}^k V_{kn} - \Gamma_{jn}^k V_{km}, \tag{15.21'}$$

получим уравнение, которое упростим путем умножения на g_{ik}. В результате

$$\rho\frac{\partial x_k}{\partial \mathrm{x}_i}\left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2}-\mathrm{X}_k\right)=\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{x}_i}+2\mu g^{jk}\nabla_j V_{ik}\qquad (i=1,2,3).\quad (15.22)$$

Это и есть искомые уравнения, причем скаляр Π имеет вид

$$\Pi=-p+\lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}=-p-\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}=-p+\frac{\lambda}{A}\frac{\partial A}{\partial t},\quad (15.23)$$

так как ρ через ρ_0 определяется законом сохранения массы

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\sqrt{g}=\left|\frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{x}_j}\right|=A.\quad (15.24)$$

Уравнения движения (15.22) можно явно и полностью выразить через давление p и искомый закон движения $\boldsymbol{x}=\varphi(\mathbf{x},t)$. Для этого отметим выражения символов Кристоффеля Γ^k_{jm}, вытекающие из (6.68):

$$\Gamma^k_{jm}=\text{э}^k\frac{\partial \text{э}_j}{\partial \mathrm{x}^m}=B^k_r\frac{\partial A^r_j}{\partial \mathrm{x}^m}=B^k_r\frac{\partial A^r_m}{\partial \mathrm{x}^j}=\frac{\partial\ln A}{\partial A^r_k}\frac{\partial A^r_m}{\partial \mathrm{x}^j};\quad (15.25)$$

дифференцируя по t компоненту g_{km}, получим

$$2V_{km}=\frac{\partial g_{km}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(A^r_kA^r_m)=A^r_k\frac{\partial^2 x^r}{\partial t\partial \mathrm{x}^m}+A^r_m\frac{\partial^2 x^r}{\partial t\partial \mathrm{x}^k}.$$

Теперь для краткости примем обозначения производных по t точкой сверху, по x^k — индексом k после запятой снизу

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}=\dot{\boldsymbol{x}};\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^k}=A^i_k\mathbf{e}_i=x_{i,k};\ \frac{\partial x^m}{\partial \mathrm{x}^n}=A^m_n=x_{m,n}.\quad (15.26)$$

Тогда, вычисляя ковариантную производную $2\nabla_j V_{ik}$, из (15.22) получим систему уравнений

$$\ddot{x}_i-X_i+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial A}{\partial A^i_n}\left[\frac{\partial p}{\partial \mathrm{x}^n}-\lambda\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^n}\left(\frac{\dot A}{A}\right)\right]=\nu_0\chi_i,\quad (15.27)$$

$$\chi_i=\varphi^{mk}\dot{x}_{i,mk}+\varphi^{mk}_{li}\dot{x}_{l,mk}+\dot{x}_{i,k}\frac{\partial\varphi^{mk}}{\partial \mathrm{x}^m}+\dot{x}_{l,k}\frac{\partial\varphi^{mk}_{li}}{\partial \mathrm{x}^m},$$

где $\nu_0=\mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость (отнесенная к начальной плотности) и обозначены функции, зависящие только от первых производных $\boldsymbol{x}$ по координатам (т. е. от A^p_q):

$$\varphi^{mk}=Ag^{mk}=\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial A^n_m}\frac{\partial A}{\partial A^n_k},\quad (15.28)$$

$$\varphi_{li}^{mk} = AB_l^m B_i^k = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial A_m^l} \frac{\partial A}{\partial A_k^i}.$$

Отсюда видно, что функции (15.28) являются однородными по A_q^p первой степени и представляют отношения однородных полиномов четвертой и третьей степеней, поскольку, аналогично (6.21), определитель A имеет выражение

$$A = \partial_{ijk} A_1^i A_2^j A_3^k;$$

следовательно, производные их по **x** будут иметь вид

$$\frac{\partial \varphi^{mk}}{\partial \mathrm{x}^m} = \psi_j^{ikm} x_{j,im}; \quad \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^m} \varphi_{li}^{mk} = \psi_{pli}^{mkq} x_{p,qm}, \tag{15.29}$$

где коэффициенты ψ есть суммы отношений полиномов по A_p^q третьей и четвертой степеней.

Для сжимаемой жидкости система (15.27) замыкается так же, как и в эйлеровом пространстве. В случае баротропной жидкости или газа имеем

$$\frac{p}{p_0} = f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = f(A), \tag{15.30}$$

и система (15.27) становится замкнутой. В случае несжимаемости дополнительное уравнение имеет вид

$$A = 1. \tag{15.30'}$$

Умножая обе части уравнения (15.27) на A_r^i/A, получим другой вид

$$\frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{x}_r} (\ddot{x}_i - X_i) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{x}_r} = \nu_0 \chi_i \frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{x}_r}, \tag{15.31}$$

откуда можно исключить Π и получить векторное уравнение распространения вихря в декартовых переменных $\mathbf{x} = \mathrm{x}_r \mathbf{e}_r$:

$$\operatorname{rot} \left[\frac{A_r^i}{A} (\ddot{x}_i - X_i) \mathbf{e}_r \right] = \nu_0 \operatorname{rot} \left(\frac{A_r^i}{A} \chi_i \mathbf{e}_r \right). \tag{15.32}$$

Оператор состояния $\widetilde{\mathcal{F}}$, имеющий вид (15.18), при условии $\lambda' = \lambda + 2\mu/3 \geqslant 0$ (15.12), т. е. $w^* = R_{\text{вязк}} \geqslant 0$, является обратимым: умножая (15.18) на g^{mn} и учитывая (15.23), находим

$$\frac{1}{3} S_{mn} g^{mn} \equiv \sigma = -p + \lambda' \operatorname{div} \mathbf{v} = -p - \lambda' \frac{\partial \ln \rho}{\partial t}; \tag{15.33'}$$

в баротропном случае $p(\rho)$ имеет обратную функцию, и потому $\rho = \rho_0/A$ определяется через σ, а значит, и Π становится извест-

ным функционалом от $\sigma(t)$. Теперь уравнение (15.18) становится линейным

$$\mu \frac{dg_{mn}}{dt} + g_{mn}\Pi[\sigma] = S_{mn}, \qquad (15.33)$$

и решение, т. е. g_{mn} в виде оператора от σ, S_{mn}, находится эффективно. Следовательно, естественные граничные условия (§ 13) для вязких жидкостей — это полные условия кинематического и динамического типа: на границе области течения задан вектор $\boldsymbol{\varphi}_\Sigma$ (13.33), или $\mathbf{v}_\Sigma$ (13.34), или $\mathcal{P}_\Sigma^{(\nu)}$ (13.36), или $\mathcal{P}_\Sigma^{(n)}$ (13.37), или смешанный вектор. В эйлеровых координатах динамические условия имеют вид

$$\Pi n_j + 2\mu v_{ij} n_i = \mathcal{P}^{(n)} \mathbf{e}_j \equiv \mathcal{P}_j^{(n)} \text{ на } \Phi = 0, \qquad (15.34)$$

т. е. на поверхности должны быть заданы все три компоненты внешней силы. Например, на свободной поверхности ($\mathcal{P}^{(n)} = -p_0 \mathbf{n}$) несжимаемой жидкости три условия имеют вид

$$(p - p_0)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 2\mu v_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (j = 1, 2, 3). \qquad (15.34')$$

§ 16. Линейная теория упругости

Твердое тело, в котором напряженное состояние в любой точке в любой момент времени t зависит только от деформаций в этой точке в этот же момент времени t (и от температуры или других немеханических параметров), называется *идеально упругим*. Оно называется еще и *изотропным*, если в любой точке все направления равнозначны в отношении упругих свойств, т. е. *упругие свойства характеризуются только скалярными физическими константами*. Тело называется *однородным*, если упругие свойства (при одинаковых значениях параметров μ) одинаковы во всех точках тела.

В классической теории упругости рассеяние w^* предполагается равным нулю, свободная энергия предполагается функцией только деформаций и температуры (параметров состояния) и деформации считаются малыми, т. е. вектор перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{x} - \mathbf{x}$ удовлетворяет условиям

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \leqslant \delta, \ \delta \ll 1 \ (i, j = 1, 2, 3).$$

В этом случае свободная энергия $\psi(\varepsilon_{ij}, T)$ представляется в виде ряда по переменным ε_{ij}, T, в котором ограничиваются квадратичными членами. Поскольку ψ — инвариант и тело изотропно, значит, ψ зависит только от инвариантов $\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ и $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$.

Плотность ρ в уравнениях движения считается постоянной, абсолютная температура — равной $T_0+\vartheta$ и не сильно отличающейся от некоторой постоянной T_0. Итак, имеем с учетом (11.26)

$$\rho_0\psi = A_0 - S_0 T + B_0\theta + \frac{1}{2}\left(\lambda\theta^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - 2\beta\vartheta\theta - \frac{\rho_0 c\,\vartheta^2}{T_0}\right),$$

$$\rho_0 s = -\frac{\partial\rho_0\psi}{\partial T} = S_0 + \beta\theta + \frac{\rho_0 c\vartheta}{T_0}, \qquad (16.1)$$

$$c_v = -T_0\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} = c\frac{T_0}{T_0} = c,$$

$$\rho_0 u = A_0 + (B_0+\beta T_0)\theta + \frac{1}{2}\left(\lambda\theta^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + 2\rho_0 c\vartheta + \frac{\rho_0 c\,\vartheta^2}{T_0}\right),$$

причем A_0, S_0 — несущественные постоянные.

При сделанных предположениях свободная энергия является потенциалом для тензора напряжений, и потому напряжения σ_{ij} определятся соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\rho_0\psi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \beta\vartheta\delta_{ij} + B_0\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (16.2)$$

Мы получили *закон Гука* с учетом температуры, причем $B_0=0$, так как предполагается, что при $\varepsilon_{ij}=\vartheta=0$ также $\sigma_{ij}=0$. Свертывая (16.2) с δ_{ij}, получим закон объемной упругости (термоупругости)

$$\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} \equiv \sigma = K(\theta - 3\alpha\vartheta), \qquad (16.3)$$

Отсюда видно, что оператор $\widetilde{S} = \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{\mathcal{E}}, T)$ обратим, если K ограничено. K называется *модулем объемного сжатия*, а α является *коэффициентом линейного расширения*

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad \beta = 3\alpha K. \qquad (16.4)$$

Разрешая (16.2) при $K\neq\infty$ относительно деформаций ε_{ij}, получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E}\sigma\delta_{ij} + \alpha\vartheta\delta_{ij}, \qquad (16.5)$$

где

$$E = \mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \qquad (16.6)$$

E называется *модулем Юнга*, ν — *коэффициентом Пуассона*. Постоянные λ, μ называются *константами Ляме*, причем $\mu = G$ назы-

вается также *модулем сдвига*. Между упругими постоянными * (только две из них независимы) имеются соотношения

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{16.7}$$

Все модули упругости (λ, μ, E, K) имеют размерность напряжения, ν — величина безразмерная.

Закон Гука (16.5) записывается (при $\vartheta=0$, т. е. при постоянной температуре T_0) обычно в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})], & 2\varepsilon_{12} &= \frac{1}{G}\sigma_{12}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33}+\sigma_{11})], & 2\varepsilon_{23} &= \frac{1}{G}\sigma_{23}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})], & 2\varepsilon_{31} &= \frac{1}{G}\sigma_{31}. \end{aligned} \tag{16.8}$$

Все соотношения (16.1)—(16.8) при малых деформациях справедливы в любых ортогональных криволинейных координатах, так как относятся к малому прямоугольному параллелепипеду.

Внося значения σ_{ij} (16.2) в уравнения движения в декартовых координатах

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho(X_i - W_i) = 0$$

и учитывая выражения деформаций через перемещение $\mathbf{u}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{16.9}$$

получим

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu\Delta u_i + \rho_0 X_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{16.10}$$

или в векторной форме, пригодной *для любой системы координат*:

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho_0\mathbf{F} = \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \beta\,\mathrm{grad}\,T. \tag{16.11}$$

В изотропном твердом теле теплопроводность подчиняется закону Фурье (Λ — *коэффициент теплопроводности*)

* Правильнее было бы сказать «константами упругого тела», однако термин «упругие постоянные» широко распространен.

$$\mathbf{q} = -\Lambda \operatorname{grad} T \qquad \left(q_i = -\Lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \tag{16.12}$$

и поэтому из соотношения

$$\frac{\partial \rho_0 s}{\partial t} = -\frac{1}{T_0} \operatorname{div} \mathbf{q}$$

на основании (16.1) получаем *уравнение теплопроводности*

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda \Delta T - \beta T_0 \frac{\partial \theta}{\partial t}. \tag{16.13}$$

Система уравнений (16.11), (16.13) для вектора $\mathbf{u}$ и температуры T совместна и замкнута. Теплообразованием за счет объемной деформации $\beta T_0 \frac{\partial \theta}{\partial t}$ в (16.13) часто пренебрегают ввиду малости; тогда уравнение (16.13) самостоятельно определяет температуру $T(\mathbf{x}, t)$, и в уравнении (16.11) член $\beta \operatorname{grad} T$ представляет как бы дополнительную известную массовую силу.

При $T = \text{const}$ система (16.10) называется уравнениями движения в форме Ляме.

Значения термоупругих констант некоторых твердых тел даны в табл. 5 (при нормальных условиях)

Таблица 5

Материалы	E, кгс/см^2	ν	ρg, кгс/см^3	C, ккал/(кгс·К)	Λ, ккал/(см·с К)	α, К$^{-1}$
Железо	$2{,}1 \cdot 10^6$	0,28	$7{,}86 \cdot 10^{-3}$	0,113	$0{,}161 \cdot 10^{-3}$	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$
Медь	$1{,}1 \cdot 10^6$	0,34	$8{,}93 \cdot 10^{-3}$	0,093	$0{,}920 \cdot 10^{-3}$	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
Алюминий	$0{,}75 \cdot 10^6$	0,34	$2{,}7 \cdot 10^{-3}$	0,217	$0{,}504 \cdot 10^{-3}$	$2{,}6 \cdot 10^{-5}$

Коэффициент Пуассона ν для металлов близок к 0, 3, а вообще заключен в пределах $-1 < \nu < 0{,}5$. При $\nu < -1$ из (16.7), (16.8) следует, что $G < 0$, т. е. положительным сдвиговым напряжением (например, $\sigma_{12} > 0$) соответствуют сдвиги в обратном направлении ($\varepsilon_{12} < 0$), энергия сдвигов становится отрицательной. При $\nu > {}^1/_2$ имеем $K < 0$, и, значит, такое же положение возникает с объемными деформациями. При $\nu \to 0{,}5$ величина $K \to \infty$, а так как в теле действует конечное напряжение σ, то это возможно лишь при $\theta \to 3\alpha\vartheta$, т. е. когда материал является механически несжимаемым, а только способен получать тепловое расширение. В этом случае произведение $K(\theta - 3\alpha\vartheta)$ становится неопределенным, и потому функция σ должна быть принята за новую неизвестную.

В случае несжимаемого материала закон Гука записывается в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij} - \alpha\vartheta\delta_{ij}), \tag{16.14}$$

и уравнения движения принимают вид

$$\operatorname{grad}\sigma + \mu\,\Delta\,\mathbf{u} + \rho\,\mathbf{F} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + 2\mu\alpha\operatorname{grad}T. \tag{16.15}$$

К ним добавляется условие несжимаемости

$$\operatorname{div}\mathbf{u} - 3\alpha\vartheta = 0. \tag{16.16}$$

Система (16.13), (16.15), (16.16) становится замкнутой для $\mathbf{u}, \sigma, T$.

Существование положительно определенной формы — потенциальной энергии

$$\delta' A = \sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\,d\varepsilon_{ij},$$

$$W = \frac{K}{2}(\theta - 3\alpha\vartheta)^2 + \mu\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}\right)^2 \tag{16.17}$$

обеспечивает существование и единственность решения при полных граничных условиях (13.33) или (13.36) или смешанных.

Однородное тело называется *анизотропным*, если упругие свойства его различны по различным направлениям, т. е. соотношения между σ_{ij} и ε_{ij} (мы по-прежнему рассматриваем малые деформации) определяются тензором упругих «постоянных», компоненты которого изменяются при преобразованиях системы координат. Такими свойствами обладают *кристаллы* и *конструктивно анизотропные тела*. Среди последних, например, стеклопластики (тела, образованные густой сеткой стеклянных нитей, скрепленных различными полимерами (смолами)), многослойные фанеры и др. В случае конструктивной анизотропии предполагается, что малый объем dV содержит достаточное число армирующих элементов, т. е. является представительным.

Свободную энергию при малых изотермических деформациях можно представить в следующем наиболее общем виде, содержащем 81 константу:

$$\rho_0\psi = \text{const} + \frac{1}{2}E_{ij,mn}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{mn}. \tag{16.18}$$

Из условия симметрии тензора $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ следует, что без потери общности в (16.17) можно положить

$$E_{ij,mn} = E_{ij,nm}, \quad E_{ij,mn} = E_{ji,mn}, \tag{16.18'}$$

т. е. в (16.18) содержится 36 независимых упругих констант $E_{ij,mn}$. Кроме того, из условия $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{mn}} = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_{mn}\,\partial\varepsilon_{ij}}$ следует еще 15 соотношений

$$E_{ij,mn} = E_{mn,ij}, \tag{16.19}$$

и, таким образом, всего остается 21 независимая упругая постоянная. Закон Гука в этом наиболее общем случае упругой анизотропии имеет вид

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = E_{ij,mn}\varepsilon_{mn} = E_{ij,11}\,\varepsilon_{11} + E_{ij,12}\,\varepsilon_{12} + E_{ij,13}\,\varepsilon_{13} + E_{ij,21}\,\varepsilon_{21} +$$
$$+ E_{ij,22}\,\varepsilon_{22} + E_{ij,23}\,\varepsilon_{23} + E_{ij,31}\,\varepsilon_{31} + E_{ij,32}\,\varepsilon_{32} + E_{ij,33}\,\varepsilon_{33}. \tag{16.20}$$

Вследствие симметрии ε_{ij} и σ_{ij}, т. е. учитывая (16.17), (16.18) из (16.20), конечно, можно получить шесть 6-членных формул, в которые войдет 21 независимая постоянная $E_{ij,mn}$.

Число констант для каждого частного типа кристаллов или вообще частного вида анизотропии уменьшается в соответствии с имеющейся симметрией. Из (16.20) следует, что если мы произведем ортогональное преобразование системы координат (x_i), по отношению к которой написана связь (16.20), то для $E_{ij,mn}$ получим тензорный закон преобразования. Пусть преобразование координат x_i имеет вид $x'_i = l_{ij}x_j$. В новых осях

$$\sigma'_{ij} = E'_{ij,mn}\varepsilon'_{mn}; \tag{16.21}$$

используя формулы преобразования

$$\sigma'_{ij} = l_{ik}\,l_{jl}\,\sigma_{kl}, \quad \varepsilon'_{ij} = l_{im}\,l_{jn}\,\varepsilon_{mn}, \quad \varepsilon_{pq} = l_{mp}l_{nq}\,\varepsilon'_{mn}$$

и соотношение $\sigma_{kl} = E_{kl,pq}\varepsilon_{pq}$, получим

$$E'_{ij,mn} = l_{ik}\,l_{jl}\,l_{mp}\,l_{nq}\,E_{kl,pq}, \tag{16.22}$$

т. е. $E_{ij,mn}$ — действительно тензор 4-го порядка.

Симметрия свойств тела означает, что для определенных (т. е. заранее известных для каждого тела) преобразований координат (не обязательно ортогональных) конфигурация повторяется и потому упругие константы не зависят от этих преобразований.

Например, в случае полной изотропии, как мы уже видели, (16.20) имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = (\lambda\delta_{mn}\,\delta_{ij} + 2\mu\delta_{mi}\,\delta_{nj})\,\varepsilon_{mn},$$

т. е.

$$E_{ij,mn} = \lambda\delta_{mn}\,\delta_{ij} + 2\mu\delta_{mi}\delta_{nj}. \tag{16.23}$$

Из (16.22) и (16.23) найдем при произвольном ортогональном преобразовании

$$E'_{ij,mn} = l_{ik}l_{jl}l_{mp}l_{nq}\,(\lambda\delta_{kl}\,\delta_{pq} + 2\mu\delta_{kp}\,\delta_{lq}) =$$
$$= \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu\delta_{im}\delta_{jn} = E_{ij,mn},$$

т. е. упругие постоянные не изменяются. Обратно, если в (16.22) положить $E'_{ij,mn}=E_{ij,mn}$, то мы найдем (из свойств преобразования $l_{im}l_{jm}=\delta_{ij}$), что $E_{ij,mn}$ должны иметь вид

$$c_1\,\delta_{ij}\delta_{mn}+c_2\delta_{im}\delta_{jn},$$

т. е. содержат две независимые константы c_1 и c_2 (или λ и μ).

Если свойства сохраняются только при некоторых (не произвольных) преобразованиях координат, то из (16.22) (или аналогичных неортогональных преобразований) находятся соотношения между 21 упругой постоянной.

Анизотропное упругое тело называется *ортотропным*, если существует такая ортогональная система координат x_i, в которой координатные плоскости (точнее, проведенные параллельно координатными в любой точке тела) — плоскости упругой симметрии. Если в этой системе координат изменить направление какой-нибудь оси, например x_1, на обратное, то упругие постоянные не должны изменяться. При таком преобразовании нормальные деформации ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} и напряжения σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} сохраняют знаки (так как каждый индекс у ε_{ij}, σ_{ij} входит дважды), сдвиги ε_{12}, ε_{13} и касательные напряжения σ_{12}, σ_{13} изменяют знаки на обратные, ε_{23} и σ_{23} сохраняют знаки. Аналогичные следствия будут при изменении направлений осей x_2 и x_3 на обратные. Следовательно, в рассматриваемых осях нормальные напряжения могут зависеть только от нормальных деформаций, касательные же — только от соответствующих сдвигов (σ_{12} — от ε_{12} и т. д.), т. е. в (16.20) $E_{ij,mn}$ отличны от нуля для $i=j$ только при $m=n$, а для $i\neq j$ — только при $m=i$, $n=j$. Учитывая условие симметрии (16.19), получим закон Гука для ортотропного тела в осях x_i (выбранных указанным образом) в виде

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}=E_{11,11}\,\varepsilon_{11}+E_{11,22}\,\varepsilon_{22}+E_{11,33}\,\varepsilon_{33},\\
\sigma_{22}=E_{11,22}\,\varepsilon_{11}+E_{22,22}\,\varepsilon_{22}+E_{22,33}\,\varepsilon_{33},\\
\sigma_{33}=E_{11,33}\,\varepsilon_{11}+E_{22,33}\,\varepsilon_{22}+E_{33,33}\,\varepsilon_{33},\\
\sigma_{12}=2E_{12,12}\,\varepsilon_{12},\ \ \sigma_{23}=2E_{23,23}\,\varepsilon_{23},\ \ \sigma_{31}=E_{31,31}\,\varepsilon_{31}.
\end{gathered}\tag{16.24}$$

Ортотропное тело называется *кубически-симметричным*, если свойства его (в указанных осях x_i) одинаковы по всем трем направлениям. Поворот этой системы координат вокруг любой из ее осей x_i не должен изменять констант, входящих в (16.24). Как нетрудно видеть, отсюда следует

$$\begin{gathered}
E_{11,11}=E_{22,22}=E_{33,33}=c_1,\\
E_{11,22}=E_{11,33}=E_{22,33}=c_2,\\
E_{12,12}=E_{13,13}=E_{23,23}=c_3,
\end{gathered}$$

и вместо 9 независимых упругих постоянных общего ортотропного тела остаются только три:

$$\sigma_{11} = c_1 \varepsilon_{11} + c_2 (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_{12} = 2c_3 \varepsilon_{12} \ldots \qquad (16.25)$$

Если потребовать сохранения свойств (констант) кубически-симметричного тела при повороте системы (x_i), отличном от рассматриваемых выше, то получится еще одно соотношение между c_1, c_2, c_3:

$$c_1 - c_2 = 2c_3,$$

т. е. тензор упругих постоянных в любых ортогональных координатах будет иметь вид (16.25), причем

$$\lambda = c_2, \quad \mu = c_3.$$

Система уравнений движения анизотропного упругого тела на основании (16.20) замкнута для вектора перемещения $\mathbf{u}$.

Теплопроводность анизотропных тел, как и линейное расширение, вообще говоря, различна в разных направлениях. Для всех тел, как отмечалось раньше, $-q^i \nabla_i T \geqslant 0$, т. е. в декартовых координатах $-q_i \dfrac{\partial T}{\partial x_i} \geqslant 0$. Отсюда в общем случае линейной зависимости потока тепла $\mathbf{q}$ от $\operatorname{grad} T$ имеем

$$q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \qquad (16.26)$$

причем скорость возрастания энтропии теплообмена

$$\theta^{**} = -q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} \geqslant 0 \qquad (16.27)$$

положительная однородная квадратичная форма относительно $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$. Без уменьшения общности выражения (16.26) тензор коэффициентов теплопроводности λ_{ij} можно считать симметричным (так как θ^{**} — скаляр, $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ — вектор, то по обратному признаку следует, что λ_{ij} — тензор)

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}. \qquad (16.28)$$

Свободную энергию единицы объема анизотропного упругого тела при малых деформациях и малых отклонениях (равных ϑ) от постоянной температуры T_0 можно записать в виде, аналогичном (16.1):

$$\rho_0\psi = A_0 - S_0 T + \frac{1}{2}\left(E_{ij,mn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} - 2\vartheta\beta_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{\rho_0 c}{T_0}\vartheta^2\right), \quad (16.29)$$

откуда аналогично (16.1)

$$\rho_0 s = -\frac{\partial \rho_0\psi}{\partial T} = S_0 + \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\rho_0 c}{T_0}\vartheta, \quad (16.30)$$

$$c_v = -T_0\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} = c.$$

Следовательно, связь между σ_{ij}, ε_{ij}, T будет

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 \rho_0\psi}{\partial\varepsilon_{ij}} = E_{ij,mn}\varepsilon_{mn} - \vartheta\beta_{ij}. \quad (16.31)$$

Поскольку σ_{ij}—$E_{ij,mn}\varepsilon_{mn}$ — симметричный тензор, то β_{ij} также симметричен

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad (16.32)$$

и является тензором коэффициентов температурных напряжений. Разрешая (16.31) относительно деформаций, получим

$$\varepsilon_{ij} = \mathscr{E}_{ij,mn}(\sigma_{mn} + \beta_{mn}\vartheta), \quad (16.33)$$

где $\mathscr{E}_{ij,mn}$ — тензор, обратный $E_{ij,mn}$. Как видно из этих формул, тензор $\mathscr{E}_{ij,mn}\beta_{mn}$ — *тензор коэффициентов температурной деформации анизотропного тела.* Из (16.33) следует, что ненапряженное анизотропное тело ($\sigma_{ij}=0$) может за счет равномерного нагревания получать не только объемные, но и сдвиговые деформации.

Замкнутая система уравнений динамической термоупругости анизотропного тела получается для $\mathbf{u}$ и T из соотношений

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho_0 s}{\partial t} = -\frac{1}{T_0}\operatorname{div}\mathbf{q},$$

причем последнее уравнение (теплопроводности) имеет вид

$$\rho_0 c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{ij}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\,\partial x_j} - T_0\beta_{ij}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t}. \quad (16.34)$$

Граничные условия совпадают с изотропным случаем.

Применение этих уравнений возможно как к собственно анизотропным телам (кристаллам), так и к конструктивно анизотропным. В последнем случае сетка «арматуры» должна быть достаточно густой, и все рассматриваемые величины (температура T, поток тепла $\mathbf{q}$, деформации, напряжения) являются средними в некотором смысле. Понятия средних могут быть уточнены на основе опытов с образцами, в которых создаются «однородные» условия, или из теоретических соображений, которые специфичны для конкретных моделей тела.

§ 17. Нелинейная теория упругости

В нелинейной теории упругости сохраняются все основные предположения линейной теории упругости, за исключением предположения о малости деформаций; последние могут быть произвольными. Ограничимся случаем *изотропного* тела.

Компоненты деформации ε_{ij} в лагранжевых координатах ($x_i = x^i$) выражаются через компоненты метрического тензора g_{ij} соотношениями

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}. \tag{17.1}$$

Следовательно, как уже отмечалось в § 6, сам метрический тензор также является тензором деформации, т. е. деформация тела вполне определяется его ковариантными компонентами. Метрический тензор, как и тензор $\widetilde{\mathcal{E}}$, определяется законом движения частицы $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\,(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$.

Инварианты тензора g_{ij} относительно ортогональных преобразований начальной системы координат $x^i = x_i$ определяются как коэффициенты кубического уравнения $|g_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$, их обозначим через a, b, c:

$$\begin{gathered} -\lambda^3 + a\lambda^2 - b\lambda + c = 0, \\ a = g_{ij}\delta^{ij} = g_{11} + g_{22} + g_{33}, \\ b = 1/2\,(a^2 - g_{ij}g_{ij}), \; c = g = |g_{ij}| = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2. \end{gathered} \tag{17.2}$$

Уравнение $|g_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$ получается при определении главных деформаций (§ 6), и в обозначениях § 6 получаем $\lambda = g_x$,

$$a = I_{g1}, \; b = I_{g2}, \; c = I_{g3}. \tag{17.3}$$

Ниже метрический тензор, выраженный через его компоненты g_{ij}, будем обозначать G, единичный тензор, выраженный через δ_{ij}, будем обозначать E

$$G = (g_{ij}), \quad E = (\delta_{ij}) \tag{17.4}$$

и G называть тензором деформации. Тензор деформации $G = (g_{ij})$ при $t = 0$ имеет значение $G^0 = E = (\delta_{ij})$.

Выпишем разложение тензор-функции $\mathcal{F}$ от тензора G (и единичного E)

$$\mathcal{F}(G, E) = c_0E + c_1G + c_2G^2 + \ldots + c_lG^l \; (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17.5}$$

Этот ряд может быть свернут на основании *тождества Гамильтона — Кели*. Собственные (главные) значения тензора g_{ij} (λ_1, λ_2, λ_3) удовлетворяют кубическому уравнению (17.2). Можно непосредст-

венно проверить, что и тензор $G=(g_{ij})$ удовлетворяет этому уравнению, т. е.

$$-G^3+aG^2-bG+cE=0. \qquad (17.6)$$

Это значит, что имеет место тождество

$$g_{im}g_{mn}g_{nj}=ag_{im}g_{mj}-bg_{ij}+c\delta_{ij}, \qquad (17.7)$$

где a, b, c — инварианты группы (17.2). Умножая (17.6) на G^{l-3}, получим рекуррентную формулу

$$G^l=aG^{l-1}-bG^{l-2}+cG^{l-3}. \qquad (17.8)$$

Следовательно, соотношение (17.5) приводится к виду

$$\mathcal{F}(G, E)=z_0E+z_1G+z_2G^2, \qquad (17.9)$$

где z_i — некоторые полиномы от инвариантов a, b, c, определяемые характером тензор-функции $\mathcal{F}$. Поскольку контравариантный тензор g^{ij} согласно (17.1) есть тензор-функция g_{ij}, значит, он тоже представим в виде (17.9)

$$g^{ij}=\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=\ldots. \qquad (17.10)$$

Формула (17.9) показывает, что *три тензора E, G, G^2 образуют полный базис.* Значит, три любых линейно-независимых тензор-функции тензора (g_{ij}) также образуют полный базис; в частности, таковым является базис

$$E=(\delta_{ij}),\quad G=(g_{ij}),\quad G^{-1}=g^{ij}. \qquad (17.11)$$

Соответствующие базисы могут быть построены и с помощью тензора деформации

$$2\varepsilon_{ij}=g_{ij}-\delta_{jj}. \qquad (17.12)$$

Определенное удобство представляет базис, получающийся дифференцированием инвариантов a, b, c (17.2) по g_{ij} или по ε_{ij}:

$$a^{ij}=\frac{\partial a}{\partial g_{ij}}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{ij}}=\delta_{ij},\quad (a^{ij})=E,$$

$$b^{ij}=\frac{\partial b}{\partial g_{ij}}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{ij}}=a\delta_{ij}-g^{ij},\quad (b^{ij})=B,$$

$$c^{ij}=\frac{\partial c}{\partial g_{ij}}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial c}{\partial \varepsilon_{ij}}=gg^{ij},\quad (c^{ij})=gG^{-1}. \qquad (17.13)$$

Тензор напряжения, являющийся по предположению функцией тензора деформаций и температуры, в этом базисе представим в виде

$$\widetilde{S} = 2\rho\,(\psi_a E + \psi_b B + \psi_c g G^{-1}),\ \ \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{g}}, \tag{17.14}$$

или через контравариантные компоненты $\widetilde{S}$

$$S^{ij} = 2\rho\,(\psi_a a^{ij} + \psi_b b^{ij} + \psi_c c^{ij}) = \\ = \rho\left(\psi_a \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{ij}} + \psi_b \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{ij}} + \psi_c \frac{\partial c}{\partial \varepsilon_{ij}}\right), \tag{17.15}$$

где ψ_a, ψ_b, ψ_c — некоторые скалярные функции, зависящие от инвариантов, a, b, c и параметров μ (температуры T), определяемые физическими свойствами твердого тела. Эти три функции мы будем считать заданными:

$$\psi_a(a, b, c, T),\quad \psi_b(a, b, c, T),\quad \psi_c(a, b, c, T). \tag{17.16}$$

Следовательно, (17.15) полностью определяет связь между тензорами напряжений и деформаций. В действительности для области больших деформаций упругих тел, таких как высокоэластические полимеры, эти функции изучены еще слабо, и их определение представляет всегда сложную задачу для экспериментатора.

Существование потенциала внутренних сил доказывается на основании двух *предположений* относительно идеально упругого анизотропного и изотропного тела: 1) функция рассеяния $w^*\delta t = \rho T\delta s - \delta' Q$ равна нулю, т. е.

$$\rho\delta s = \frac{\delta' Q}{T}; \tag{17.17}$$

2) компоненты тензора деформаций вместе с температурой являются полной системой независимых параметров состояния частицы.

При этом свободная энергия, являющаяся скалярной функцией состояния

$$u - sT = \psi(\varepsilon_{ij}, T), \tag{17.18}$$

будет потенциалом для тензора напряжений S^{ij}. Действительно, из основного термодинамического соотношения (§ 11)

$$\rho\,(\delta\psi + s\,\delta T) = S^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} \tag{17.19}$$

следует

$$S^{ij} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}},\ \ s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}. \tag{17.20}$$

Таким образом, если известна только одна функция состояния — свободная энергия $\psi(\varepsilon_{ij}, T)$, то не только определяются энтропия s и внутренняя энергия u

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}, \quad u = \psi - T\frac{\partial\psi}{\partial T}, \tag{17.21}$$

но и становится известной связь между напряжениями и деформациями.

В случае изотропного тела ψ зависит только от скалярных характеристик деформации, т. е. от инвариантов a, b, c

$$\psi = \psi(a, b, c, T), \; s(a, b, c, T) = -\frac{\partial\psi}{\partial T},$$

$$u(a, b, c, T) = \psi - T\frac{\partial\psi}{\partial T}. \tag{17.22}$$

Следовательно, из (17.20) получаем снова соотношения (17.15), причем оказывается, что три входящие в них скалярные функции не являются независимыми, а выражаются через ψ:

$$\psi_a = \frac{\partial\psi}{\partial a}, \quad \psi_b = \frac{\partial\psi}{\partial b}, \quad \psi_c = \frac{\partial\psi}{\partial c}, \tag{17.23}$$

т. е. между ними должны существовать соотношения

$$\frac{\partial\psi_a}{\partial b} = \frac{\partial\psi_b}{\partial a}, \quad \frac{\partial\psi_a}{\partial c} = \frac{\partial\psi_c}{\partial a}, \quad \frac{\partial\psi_b}{\partial c} = \frac{\partial\psi_c}{\partial b}, \tag{17.24}$$

которые могут быть проверены в опытах.

Действительное приращение работы внутренних сил в изменяющемся объеме V тела постоянной массы ($dM = \rho dV$) за время dt равно

$$\delta' W = \int_V S^{ij} d\varepsilon_{ij} dV = \int_V \frac{1}{\rho} S^{ij} d\varepsilon_{ij} \rho dV.$$

Оно и при условии (17.23) не будет полным дифференциалом, как и приращение работы в объеме единичной массы

$$\frac{1}{\rho} S^{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \psi_a da + \psi_b db + \psi_c dc,$$

поскольку полное приращение ψ за dt будет

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial\psi}{\partial T} dT = \frac{S^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} - s dT.$$

Но в случае *изотермического процесса* ($T = \text{const}$) это будут полные дифференциалы

$$\frac{S^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} = d\psi, \quad \delta' W = dW_T, \quad W_T = \int_V \rho\psi dV + \text{const}. \tag{17.25}$$

Аналогично — в случае *адиабатического процесса*; при этом $\delta' Q=0$, и потому из (17.17) имеем $s=\text{const}$, вследствие чего

$$\frac{S^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} = d(\psi + sT) = du, \quad \delta' W = dW_s,$$

$$W_s = \int_V \rho u dV + \text{const}. \tag{17.26}$$

Работа внутренних напряжений в единице массы и во всем объеме тела будет за время dt полным дифференциалом во всех тех случаях, когда в процессе деформации обеспечивается какое-нибудь соотношение между функциями состояния, приводимое к виду

$$f(s, T) = 0,$$

т. е. дающее определенную связь между энтропией s и температурой T, так как при этом

$$\frac{S^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} = d\psi + s(T)\,dT = d\left(\psi + \int s dT\right),$$

$$\delta' W = dW_f, \quad W_f = \int_V \rho\left(\psi + \int s dT\right) dV + \text{const}. \tag{17.27}$$

Если существует потенциал напряжений (17.20), то существует и потенциал деформаций. Обозначая

$$\frac{1}{\rho} S^{ij} = \widetilde{S}^{ij}, \tag{17.28}$$

имеем из (17.19)

$$\delta\psi + s\delta T = \widetilde{S}^{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \delta(\widetilde{S}^{ij}\varepsilon_{ij}) - \varepsilon_{ij}\delta\widetilde{S}^{ij}.$$

Если введем *термодинамический потенциал*

$$\Phi(\widetilde{S}^{ij}, T) = \psi - \frac{1}{\rho} S^{ij}\varepsilon_{ij} = u - sT - \frac{1}{\rho} S^{ij}\varepsilon_{ij} \tag{17.29}$$

и предположим, что за независимые параметры приняты T, $\widetilde{S}^{ij}$, то получим

$$-\varepsilon_{ij}\delta\widetilde{S}^{ij} = \delta\Phi + s\delta T, \tag{17.30}$$

откуда

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\widetilde{S}^{ij}}, \quad s = -\frac{\partial\Phi}{\partial T}. \tag{17.31}$$

Коэффициент теплоемкости c_v при постоянных деформациях ($\delta\varepsilon_{ij}=0$) определяется из условия $\delta' Q = \rho c_v \delta T = \rho du(T, \varepsilon_{ij})$. Следовательно, на основании (17.21) имеем

$$c_v = \frac{\partial u(T,\ \varepsilon_{ij})}{\partial T} = -T\frac{\partial^2\psi(T,\ \varepsilon_{ij})}{\partial T^2}. \qquad (17.32)$$

Аналогично можно получить $c_p = \dfrac{\partial u(T,\ S^{ij})}{\partial T}$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi(S^{ij},\ T)}{\partial T^2} < 0.$$

Уравнения движения изотропного упругого тела в перемещениях получаются подстановкой закона упругости (17.15) при заданной функции $\psi(\varepsilon_{ij}, T)$ в уравнения (10.11)

$$\rho_0\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} - X_i\right) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^m}(AA^i_n S^{mn}); \qquad (17.33)$$

$$A = \sqrt{g}, \quad A^i_n = \frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{x}^n}.$$

Система (17.33) при заданной $\psi(\varepsilon_{ij}, T)$ и заданном поле температуры $T(\mathbf{x}, t)$ замкнута относительно перемещения $\mathbf{u}$ или вектора $\boldsymbol{x} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ согласно (17.20).

Если поле температуры неизвестно, то используется закон теплопроводности, определяющий поток тепла $\mathbf{q}$ через градиенты температуры (11.17)

$$q^i = -\Lambda^{ij}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{x}^j} \qquad (17.34)$$

и баланса энтропии (12.12)

$$\rho T\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^i}\left(\Lambda^{ij}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{x}^j}\right), \qquad (17.35)$$

причем в изотропном случае $\Lambda^{ij} = \lambda g^{ij}$.

Граничные условия для основных задач в перемещениях или напряжениях имеют вид (§ 13)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\Sigma \quad \text{или} \quad \mathbf{S}^i \nu_i = \mathcal{P}^{(\nu)}_\Sigma \quad \text{при} \quad \Phi = 0, \qquad (17.36)$$

а для поля температуры

$$T = T_\Sigma \quad \text{или} \quad q^i\nu_i = q_\Sigma \quad \text{при} \quad \Phi = 0.$$

Все уравнения теории упругости могут быть записаны в эйлеровом пространстве на основании преобразований § 9, 11 функционала (17.14).

Глава V
СРЕДЫ СО СЛОЖНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Механические свойства жидкостей и твердых тел, не обладающих совершенной упругостью и вязкостью, настолько переплетаются, что для тех и других нередко используются одни и те же соотношения между напряжениями и деформациями, и в этих случаях основные дифференциальные уравнения МСС для них совпадают. Важный пример таких сред представляют полимерные материалы (смолы, каучук). Технология их производства охватывает область жидкого и твердого состояния, причем упругие и вязкие свойства являются существенными. Поведение металлов в технологических процессах и в конструкциях в зависимости от диапазона температур определяется вязкими, вязкопластическими, упругопластическими или упругими свойствами.

Установление связей между напряжениями и деформациями и замыкание системы уравнений производится методами, изложенными в § 11, 12. В ряде случаев поле температуры T предполагается известным, и потому уравнения МСС становятся замкнутыми только на основании связей $(S^{ij} \sim \varepsilon_{ij})$.

§ 18. Близкие модели сред со сложными свойствами

В этом параграфе рассмотрим формально близкие между собой модели сред со сложными свойствами; *конечные деформации* будем рассматривать только в декартовых *ортогональных эйлеровых координатах* (x_i), *малые же деформации — в ортогональных декартовых лагранжевых* координатах (x_i). Компоненты тензора напряжений в обоих случаях будем обозначать σ_{ij}, скорости деформации — v_{ij}, деформации — ε_{ij}, девиаторы отмечать волной сверху

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma = 1/3\sigma_{ij}\delta_{ij},$$

$$\tilde{v}_{ij} = v_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\delta_{ij}, \quad v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right].$$

Существенную роль будут играть также вторые инварианты девиаторов $\tilde{\sigma}_{ij}$, $\tilde{v}_{ij}$, причем квадратные корни из этих инвариантов будем называть *модулями девиаторов* и обозначать

$$\tilde{\sigma}=\sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_u=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\,(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)},$$

$$\tilde{v}=\sqrt{\tilde{v}_{ij}\tilde{v}_{ij}}=\sqrt{\frac{3}{2}}v_u=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(v_{11}-v_{22})^2+\ldots}.$$

В излагаемых ниже теориях разработаны эффективные методы решения задач и вариационные принципы (§ 13).

1. Нелинейно-вязкие стабильные жидкости в простейшем случае отличаются от рассмотренной ранее классической жидкости тем, что коэффициенты вязкости зависят от тензора скорости деформации и температуры. Для изотропной нелинейной вязкой *несжимаемой* жидкости, как и для классической, девиаторы напряжений и скорости деформаций пропорциональны:

$$\tilde{\sigma}_{ij}=2\mu\tilde{v}_{ij}=2\mu v_{ij}. \tag{18.1}$$

Возводя левые и правые части этого соотношения в квадрат, получим

$$2\mu=\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{v}}=\frac{2}{3}\,\frac{\sigma_u}{v_u} \tag{18.1'}$$

и, следовательно,

$$\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}=2\mu v_{ij}. \tag{18.2}$$

В классическом случае ньютоновской несжимаемой жидкости коэффициент μ при $T=\text{const}$ постоянен. В рассматриваемом здесь случае коэффициент вязкости μ есть некоторая функция инвариантов $\tilde{v}$ и I_{3v}, однако такая, что $\tilde{\sigma}\to 0$ при $\tilde{v}\to 0$:

$$\tilde{\sigma}=\Phi(v_u,\ T),\quad \mu=\mu(\tilde{v});\quad \tilde{v}\mu(\tilde{v})\to 0\quad \text{при}\quad \tilde{v}\to 0. \tag{18.3}$$

Эта функция находится из опытов на сдвиг и обычно не зависит от I_{3v}, а только от $\tilde{v}$ и Т.

Соотношение (18.1), справедливое как для классической, так и нелинейно-вязкой жидкости, можно трактовать как *условие совпадения направлений* тензоров $\tilde{\sigma}_{ij}$ и v_{ij}, и потому оно означает *векторное* (тензорное) свойство среды.

Подобно тому как направление вектора **a** определяется единичным вектором $\mathbf{a}^0=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, также говорят о направлении тензора T_{ij}, характеризуя его так называемым *направляющим тензором* $\widetilde{T}_{ij}/\sqrt{\widetilde{T}_{mn}\widetilde{T}_{mn}}$.

Соотношения между инвариантами называются *скалярными свойствами* среды; таково (18.3). Таким образом, векторные свойства классической и рассматриваемой здесь вязкой жидкости совпадают, скалярные свойства их различны.

Работа внутренних напряжений в единицу времени в единице объема при условии (18.1) равна сумме работы девиатора $\widetilde{\sigma}_{ij}$ и среднего напряжения σ:

$$R=\sigma_{ij}v_{ij}=(\widetilde{\sigma}_{ij}+\sigma\delta_{ij})\left(\widetilde{v}_{ij}+\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\delta_{ij}\right)=$$

$$=\widetilde{\sigma}_{ij}\widetilde{v}_{ij}+\frac{1}{3}\sigma\operatorname{div}\mathbf{v}=\widetilde{\sigma}\widetilde{v}+\frac{1}{3}\sigma\operatorname{div}\mathbf{v},$$

так как $\widetilde{v}_{ij}\delta_{ij}=0$ и $\widetilde{\sigma}_{ij}\delta_{ij}=0$.

Следовательно, мощность, развиваемая внутренними силами в единице объема, в случае несжимаемых жидкостей, т. е. при условии

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0, \tag{18.4}$$

равна произведению модулей $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{v}$:

$$R=\widetilde{\sigma}_{ij}\widetilde{v}_{ij}=\widetilde{\sigma}\widetilde{v}=\sigma_u v_u=2\mu\widetilde{v}^2=3\mu v_u^2. \tag{18.5}$$

Эта мощность полностью рассеивается в тепло, т. е. $w^*=R$. Единственным независимым параметром состояния рассматриваемых стабильных жидкостей считается температура T, и потому

$$\rho du=\delta' Q+Rdt,$$

$$\rho T ds=\delta' Q+Rdt, \quad \rho=\mathrm{const}.$$

Теплоемкость c зависит от T, и потому

$$ds=\frac{du}{T}, \quad u=\int c(T)\,dT+\mathrm{const}.$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\rho c\,\frac{dT}{dt}=-\operatorname{div}\mathbf{q}+2\mu\widetilde{v}^2, \tag{18.6}$$

$$\mathbf{q}=-\lambda\operatorname{grad}T.$$

Уравнения движения $\sigma_{ij,j}+\rho(X_i-w_i)=0$ при подстановке в них (18.2), условие несжимаемости (18.4) и уравнение (18.6) обра-

зуют замкнутую систему для $\mathbf{v}$, σ, T, если известен закон теплопроводности, например, $\mathbf{q} = -\Lambda \operatorname{grad} T$. Граничные условия совпадают с условиями классической теории.

2. Идеальная изотропная жесткопластическая среда Сен-Венана — идеализованное несжимаемое твердое тело, обладающее следующими свойствами:

1) компоненты девиатора напряжений ограничены по модулю, причем если

$$\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij} \equiv \tilde{\sigma}^2 \equiv \frac{2}{3}\sigma_u^2 < \frac{2}{3}\sigma_s^2 \equiv \text{const}, \tag{18.7}$$

то тело остается жестким (скорости деформации равны нулю), напряжения неопределенны;

2) если в какой-либо области тела $\tilde{v} > 0$, то выполняется *условие пластичности*, т. е.

$$\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij} \equiv \sigma_u^2 = \sigma_s^2, \tag{18.8}$$

где σ_s — константа материала, называемая пределом текучести при растяжении (при данной температуре);

3) при пластическом течении векторные свойства тела совпадают с векторными свойствами вязкой жидкости, т. е. определяются соотношением (18.2).

Опыты над многочисленными квазиизотропными материалами показывают, что чисто упругое их состояние, определяемое рассмотренными ранее свойствами и соотношениями (16.8):

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right], \; \ldots, \; 2\varepsilon_{12} = \frac{1}{G}\sigma_{12}, \; \ldots$$

существует лишь при очень малых деформациях до тех пор, пока интенсивность напряжений $\sigma_u < \sigma_s$; условие начала пластических деформаций $\sigma_u = \sigma_s$ называется *условием пластичности Мизеса*. Ранее Кулон и Сен-Венан принимали аналогичное условие в виде

$$\tau_{\max} = \tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}, \tag{18.9}$$

где $\tau_{\max}$ — наибольшее по модулю из главных касательных напряжений (8.45)

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

Соотношение (18.9) называется *условием пластичности Кулона — Сен-Венана*, τ_s — *пределом текучести при сдвиге*. Равенство $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{3}$ получается из (18.8), если рассмотреть случай чи-

стого сдвига ($\sigma_2=-\sigma_1$, $\sigma_3=0$) и вместо $(\sigma_1-\sigma_2)/2$ подставить τ_s. В § 8 доказано, что отношение τ_{max}/σ_u отличается от постоянного числа не более чем на 7% (при любых значениях σ_{ij}), и потому условия (18.8) и (18.9) близки.

В области пластического течения из (18.1), (18.2), (18.8) имеем связь между σ_{ij} и v_{ij}

$$\sigma_{ij}=\sigma\delta_{ij}+\frac{2\sigma_s}{3v_u}v_{ij}. \qquad (18.10)$$

Внося эти выражения в динамические уравнения $\sigma_{ij,j}+\rho(X_i-w_i)=0$, получим замкнутую систему уравнений для вектора скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ и среднего напряжения $\sigma(\boldsymbol{x}, t)$, если добавим условие несжимаемости $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$.

Другое определение рассматриваемой среды при условии (18.8) получим из предположений: 1) свободная энергия ψ (при условии несжимаемости) зависит только от температуры

$$\psi=\psi(T), \quad s=-\psi'(T); \qquad (18.11)$$

2) работа напряжений полностью рассеивается

$$\sigma_{ij}v_{ij}dt\equiv\tilde{\sigma}_{ij}v_{ij}dt=w^*dt\geqslant 0 \qquad (18.12)$$

(причем равна нулю только при $v_{ij}\equiv 0$); 3) девиатор напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$ зависит только от тензора скорости деформаций.

Из условий 2 и 3 и изотропии однозначно следует векторное свойство (18.2) (так как w^* — инвариант и, значит, $\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{v}_{ij}$ — инвариант тензора v_{ij}, т. е. $\tilde{\sigma}_{ij}=Av_{ij}$).

Если температура переменна, то из опытов известна зависимость $\sigma_s=\sigma_s(T)$. Учитывая закон теплопроводности Фурье и считая коэффициенты теплоемкости c и теплопроводности λ постоянными, уравнение теплопроводности (баланса энтропии) получим в виде

$$\rho c\frac{dT}{dt}=\lambda\Delta T+\sigma_s v_u. \qquad (18.13)$$

Динамические уравнения, условие несжимаемости и соотношения (18.8), (18.10) составляют замкнутую систему для $\mathbf{v}$, σ и T.

Значения σ_s для сталей при нормальных температурах (даже до +300°C) колеблется в зависимости от содержания углерода и лигирующих элементов от $2\cdot 10^3$ до $2\cdot 10^4$ кгс/см^2. В области температур от 300°C до температуры плавления (1200 ~ 1400°C) σ_s сильно падает, например в десять раз при температуре около 1000°C. В области повышенных и высоких температур существенно проявляются свойства *ползучести*, т. е. течения с некоторой скоростью при постоянных (во времени) напряжения. Это свойст-

во не отражается условием (18.8), если $\sigma_s = \sigma_s(T)$; но им обладает соотношение (18.3).

3. Идеальная изотропная вязкопластическая среда — несжимаемое твердое тело при конечных пластических деформациях или повышенных (высоких) температурах и давлениях, а также некоторые вязкие жидкости, смешанные с твердыми частицами (глинистые растворы и т. п.); для этой среды:

1) векторные свойства совпадают со свойствами вязкой жидкости (18.1), (18.2);

2) скалярные свойства обобщены по отношению к нелинейно-вязким и пластическим, а именно

$$\sigma_u = \sigma_s + \Phi(v_u), \tag{18.14}$$

где Φ — некоторая известная функция, универсальная при различных процессах. Всегда $\Phi > 0$, и почти всегда $d\Phi/dv_u > 0$.

Это среда, обладающая *ползучестью*, так как при $\sigma_u = \text{const}$ из (18.14) получается постоянная скорость ползучести

$$v_u = \Phi^{-1}(\sigma_u - \sigma_s), \tag{18.15}$$

но не релаксирующая, так как при $v_u = 0$ (т. е. при постоянных во времени деформациях) $\sigma_u = \sigma_s = \text{const}$, т. е. напряжения не уменьшаются.

Замкнутая система уравнений для такой среды определяется соотношениями (18.1), (18.2), (18.14) и уравнениями $\sigma_{ij,j} + \rho(X_i - v_i) = 0$.

4. Идеальная несжимаемая сыпучая среда — условно-твердое тело (типа сухого песка, зерна, гранулированных пород):

1) являющееся сплошным только при условии, что вектор нормального напряжения на любой площадке отрицателен;

2) максимальное касательное напряжение зависит только от нормального давления на соответствующей площадке;

3) векторные свойства совпадают с (18.1), (18.2).

Условие 1) в ортогональных координатах (x_i) имеет вид

$$N_\nu = \sigma_{ij} l_i l_j \leqslant 0, \tag{18.16}$$

где l_i — направляющие косинусы нормали $\mathbf{v}$ любой площадки. Условия отрицательности квадратичной формы (18.16) суть условия Сильвестра: определитель $|\sigma_{ij}|$ и все миноры главной диагонали должны быть отрицательны, иначе говоря, отрицательны все главные напряжения.

Условие 2) записывается сложно, так как требует явных выражений максимальных касательных напряжений через σ_{ij}.

В случае плоской деформации в плоскости (x_1, x_2)

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2},$$

$$-\sigma = -\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} = p = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

условие 2) имеет вид

$$\tau_{\max} = \mathscr{F}(p), \tag{18.17}$$

где $\mathscr{F}$ — универсальная функция. Например, вследствие сухого трения частиц может быть принят закон Кулона: $\mathscr{F}(p) = fp$, где f — коэффициент внутреннего трения (тангенс угла естественного откоса песчаной насыпи). В этом случае «условие текучести» среды будет

$$\tau_{\max}^2 \equiv \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2 = f^2\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2. \tag{18.17'}$$

Если между частицами кроме трения есть еще и сцепление, то $\mathscr{F}_1(p) = k + fp$, где k — константа сдвигового сцепления.

В общем случае условие 2) можно заменить приближенным

$$\sigma_u = \mathscr{F}_1(p), \quad 3p = \sigma_{ij}\delta_{ij}. \tag{18.17''}$$

Поскольку в случае плоской деформации $\sigma_u = \tau_{\max}\sqrt{3}$, то функция $\mathscr{F}_1$ может быть выражена через $\mathscr{F}$

$$\mathscr{F}_1(p) = \sqrt{3}\,\mathscr{F}(p),$$

и тогда в случае плоской деформации условия (18.17′), (18.17″) тождественно совпадут.

Напишем замкнутую систему уравнений МСС в случае плоской деформации при медленных движениях (в уравнениях движения отбрасываются силы инерции), учитывая, что $p = -\sigma_{33}$.

Компоненты напряжений

$$\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{12},\ \sigma_{33} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,$$

т. е. три неизвестных σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} находятся из замкнутой системы уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho X_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho X_2 = 0 \tag{18.18}$$

и условия (18.17), так как в эти три уравнения вектор скорости не входит. Последний же определяется из условия несжимаемости (18.4)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$$

и вытекающего из (18.2) одного независимого уравнения

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{4\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0. \qquad (18.19)$$

В случае постановки динамической задачи система уравнений движения и условие несжимаемости обращаются в замкнутую систему для вектора скорости $\mathbf{v}$ и среднего напряжения σ, если использовать вытекающие из (18.2) и (18.17) выражения напряжений через $\mathbf{v}$ и σ:

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + \frac{2\mathcal{F}(p)}{3v_u} v_{ij}. \qquad (18.20)$$

§ 19. Процессы деформации начально изотропной среде

Пусть перемещения и деформации среды заданы в лагранжевых координатах, которые при $t = t_0$ являются декартовой ортогональной системой координат (x_1, x_2, x_3), и пусть фиксированной *точке М тела* приписан какой-нибудь симметричный тензор y_{ij}, например ε_{ij}, $S^{ij} \equiv s_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и т. д. Представим его в виде

$$y_{ij} = \eta\delta_{ij} + \tilde{y}_{ij}, \quad 3\eta = y_{ij}\delta_{ij}. \qquad (19.1)$$

Учитывая линейную зависимость компонент девиатора $\tilde{y}_{ij}$ $(\tilde{y}_{ij}\delta_{ij} = 0)$, введем пятимерный декартов ортогональный вектор $\mathbf{y}$ с пятью независимыми компонентами $y_k (k = 1, 2, \ldots, 5)$ по формулам

$$y_k = \beta_{kij}\tilde{y}_{ij}, \quad \tilde{y}_{ij} = \beta_{ijk} y_k, \qquad (19.2)$$

где матрица $\|\beta_{kij}\| = \|\beta_{kji}\|$ и обратная $\|\beta_{ijk}\| = \|\beta_{jik}\|$ определены табл. 6 значений $\beta_{kij}/\sqrt{2}$. Здесь β — *произвольный, одинаковый для всех девиаторов y_{ij}, не зависящий от времени t параметр.*

Тогда получим *

$$\tilde{y}^2 \equiv \tilde{y}_{ij}\tilde{y}_{ij} = y_k y_k \equiv \mathbf{y}^2 \, (i, \ j = 1, \ 2, \ 3; \quad k = 1, \ 2, \ldots, \ 5),$$

т. е. модуль девиатора $\tilde{y}_{ij}$ равен модулю вектора $\mathbf{y}(y_k)$. Обозначим $|\mathbf{y}| = y$ и, по-прежнему, $\tilde{y} = \sqrt{\tilde{y}^2}$:

* На самом деле матрица β_{ijk} определена требованием $\tilde{y}^2 = y^2$.

$$y = |\mathbf{y}| = \sqrt{y_k y_k} \equiv \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2},$$

$$\tilde{y} = \sqrt{\tilde{y}^2} = \sqrt{\tilde{y}_{ij}\tilde{y}_{ij}} = \sqrt{\tilde{y}_{11}^2 + \ldots + 2\tilde{y}_{12}^2 + \ldots} . \qquad (19.3)$$

Следовательно, $\tilde{y} = y$; матрицы $\|\beta_{kij}\|$, $\|\beta_{ijk}\|$ обладают свойствами

$$\beta_{ijk}\beta_{kmn} = \delta_{im}\delta_{in},$$

$$\beta_{kij}\beta_{ijl} = \delta_{kl} \quad (i,\ j,\ m,\ n = 1,\ 2,\ 3;\quad k,\ l = 1,\ 2, \ldots,\ 5). \qquad (19.4)$$

Таблица 6

Процессы деформаций изотропных сред

k \ ij	11	22	12	23	31
1	$\cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)$	$-\sin\beta$	0	0	0
2	$\sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)$	$\cos\beta$	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

При введении вектора $\mathbf{y}$ использован неподвижный (не зависящий от t) *единичный ортогональный репер* a_k ($k = 1, 2, \ldots, 5$) 5-мерного евклидова пространства E_5, в котором два вектора $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ представляются в виде

$$\mathbf{y} = y_k\mathbf{a}_k, \quad \mathbf{z} = z_k\mathbf{a}_k \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ 5) \qquad (19.5)$$

и определены обычным образом операции сложения и умножения (скалярного произведения):

$$\mathbf{y} + \mathbf{z} = (y_k + z_k)\,\mathbf{a}_k, \quad \mathbf{yz} = \mathbf{zy} = y_k z_k, \qquad (19.6)$$

причем

$$\mathbf{a}_k\mathbf{a}_l = \delta_{kl} = \left| \begin{matrix} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{matrix} \right. \qquad (19.7)$$

Для всех точек $M_1, M_2, \ldots, M$ тела репер $\mathbf{a}_k$ общий.

Из определений следует, что можно каждому линейному оператору по времени t над компонентами девиатора $\tilde{y}_{ij}$ взаимно-однозначно поставить в соответствие тот же линейный оператор над компонентами вектора y_k, т. е. если дано векторное соотношение

$$\mathbf{z} = L(\mathbf{y}) = C_k(t)\,L^k(\mathbf{y}), \qquad (19.8)$$

то из него следует

$$\tilde{z}_{ij} = L(\tilde{y}_{ij}) = C_k(t) L^k(\tilde{y}_{ij}) \qquad (19.9)$$

и обратно.

Если в *точке M тела задан процесс* изменения во времени тензора y_{ij}, то его шесть компонент заданы в виде шести функций времени $y_{ij}=y_{ij}(t)$, т. е. согласно (19.1) задано среднее значение $y=\eta(t)$ и все компоненты девиатора $\tilde{y}_{ij}=\tilde{y}_{ij}(t)$. На основании (19.2) заключаем, что и все компоненты вектора $\mathbf{y}$ заданы как функции времени, т. е. задан в виде функции времени вектор $\mathbf{y}(t)$ (19.5). Обратно, задавая вектор $\mathbf{y}(t)$ и $\eta(t)$, тем самым задаем процесс для тензора y_{ij}.

Все введенные определения и понятие процесса относятся к тензору и вектору деформации

$$3\varepsilon = \varepsilon_{kk}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \text{э}_k = \beta_{kij}\tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \boldsymbol{\text{э}} = \text{э}_k \mathbf{a}_k, \qquad (19.10)$$

к тензору и вектору напряжений (переобозначим $s_{ij} \equiv S^{ij}$)

$$s_{ij} = \frac{1}{3} s_{kk}\delta_{ij} + \tilde{s}_{ij}, \quad \sigma_k = \beta_{kij}\tilde{s}_{ij}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_k \mathbf{a}_k. \qquad (19.11)$$

Это относится и к всевозможным тензорам z_{ij} и векторам $\mathbf{z}$, называемым физическими, которые получаются из ε_{ij}, s_{ij} с помощью линейных операторов (19.8) по времени t, например дифференциальных, интегральных

$$\tilde{z}_{ij} = \frac{d\tilde{\varepsilon}_{ij}}{dt} = \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}, \quad \mathbf{z} = \frac{d\boldsymbol{\text{э}}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\text{э}}},$$

$$\tilde{z}_{ij} = \int_{t_0}^{t} A(t, \tau)\,\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau)\,d\tau, \quad \mathbf{z} = \int_{t_0}^{t} A(t, \tau)\,\boldsymbol{\text{э}}(\tau)\,d\tau$$

и других.

Изображение в $E_5: \mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$, $\eta=\eta(t)$ процесса, происходящего в точке M тела, определяется заданием репера в E_5 и процесса $y_{ij}(t)$, т. е. девиатора $\tilde{y}_{ij}(t)$ и среднего значения $\eta = y_{ij}(t)\delta_{ij}$ в точке M.

Длиной дуги траектории s_y называется величина, для которой

$$ds_y = |d\mathbf{y}| = \sqrt{d\mathbf{y}^2} = \tilde{v}_y dt,$$

$$s_y = \int_{t_0}^{t} \tilde{v}_y\,dt, \quad \tilde{v}_y = \left|\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right| = \sqrt{\dot{\tilde{y}}_{ij}\dot{\tilde{y}}_{ij}}, \qquad (19.12')$$

причем $\tilde{v}_y$ называется интенсивностью скоростей тензора $\tilde{y}_{ij}$ или модулем скорости. Вектор $\dot{\mathbf{y}}$ определяет скорость изменения девиа-

тора y_{ij}, $\dot{\eta}$ — скорость изменения среднего значения тензора y_{ij}. Таким образом, формулы (19.12′) позволяют рассматривать компоненты тензора как функции времени, или функции длины дуги траектории.

Задание физического процесса в точке M тела (§ 11, 13) требует задания не только тензора деформации $\widetilde{\mathcal{E}}$, или тензора напряжений $\widetilde{S}$, или другого физического тензора $\widetilde{Y}$, но еще и температуры $T(t)$ и других нетермомеханических *параметров* β.

Траектория деформации $\mathbf{э}(t)$ в E_5 при данном $\mathbf{a}_k$ с построенным в каждой ее точке вектором напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и приписанными каждой точке параметрами (ε, $\widetilde{\mathcal{I}}_{2\varepsilon}$, $\widetilde{\mathcal{I}}_{3\varepsilon}$, T, β) называется *э-образом процесса в точке M тела.* Здесь $\widetilde{\mathcal{I}}_{2\varepsilon}=\widetilde{\varepsilon}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_{ij}$, $\widetilde{\mathcal{I}}_{3\varepsilon}=|\widetilde{\varepsilon}_{ij}|$, $\varepsilon=\varepsilon_{kk}/3$ — инварианты ортогональных преобразований начальных координат x^1, x^2, x^3.

Для э-образа (19.12′) принимают вид

$$ds=|d\mathbf{э}|=\widetilde{v}dt, \tag{19.12}$$

$$s=\int_{t_0}^{t}\widetilde{v}dt, \quad \widetilde{v}=\left|\frac{d\mathbf{э}}{dt}\right|=\sqrt{\dot{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}\dot{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}}, \quad \dot{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}\equiv\widetilde{v}_{ij}.$$

Работа напряжений s_{ij} на приращениях деформаций $d\varepsilon_{ij}$ равна $s_{ij}d\varepsilon_{ij}$ и включает работу сдвигов $\widetilde{s}_{ij}d\widetilde{\varepsilon}_{ij}$; полная работа девиатора напряжений равна

$$\widetilde{W}=\int_0^t\widetilde{s}_{ij}d\widetilde{\varepsilon}_{ij}=\int_0^t\boldsymbol{\sigma}d\mathbf{э}.$$

Такое же выражение работы силы $\mathbf{F}$ получается при движении материальной точки по кривой $\mathbf{x}(t)$ в механике.

Преобразования вращения и отражения в E_5 — это линейные однородные преобразования вектора $\mathbf{э}$ и всех $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ с помощью постоянной, не зависящей от t матрицы $\alpha=\|\alpha_{mn}\|$ и обратной $\widetilde{\alpha}=\|\widetilde{\alpha}_{mn}\|$:

$$\mathbf{y}'=\alpha\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}=\widetilde{\alpha}\mathbf{y}',$$

$$y'_m=\alpha_{mp}y_p, \quad y_m=\widetilde{\alpha}_{mp}y'_p \quad (m,\ p=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{19.13}$$

сохраняющие неизменной длину вектора $|\mathbf{y}|=y$ и углы между $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{y}'^2=\mathbf{y}^2=y^2, \quad \mathbf{y}'\mathbf{z}'=\mathbf{yz}; \tag{19.14}$$

$$y'_m y'_m=\alpha_{mp}\alpha_{mq}y_p y_q=y_p y_p=y^2.$$

Отсюда получаем свойства матриц α, $\tilde{\alpha}$:

$$\alpha_{mp}\alpha_{mq} = \delta_{pq}, \quad \tilde{\alpha}_{mp}\tilde{\alpha}_{np} = \delta_{mn},$$
$$\operatorname{Det}(\alpha_{mn}) \equiv |\alpha_{mn}| = \pm 1 \quad (m,\ n,\ p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5). \quad (19.15)$$

Здесь 15 независимых уравнений для 25 параметров α_{mn}, т. е. остаются произвольными десять параметров.

Такие ортогональные преобразования (как и в трехмерном пространстве) называются *преобразованиями вращения* при $|\alpha_{mn}| = +1$ и *отражения* — при $|\alpha_{mn}| = -1$.

Физические процессы $\mathbf{э}(t)$ и $\mathbf{э}'(t) = \alpha\mathbf{э}$ в точке M тела различны, что следует из (19.2). На основании (19.2) и свойств (19.4) можно доказать, что *преобразование поворота системы координат* (x_i) *в точке М тела*, определяемое тремя параметрами (углами Эйлера), есть частный случай преобразований вращения, а изменение угла β, которым определяются коэффициенты в (19.2), — частный случай преобразований отражения, а именно однопараметрическое отражение. Ясно, что *э*-образ инвариантен относительно этих двух преобразований.

Из (19.13), (19.4) дифференцированием по t на основании (19.15) получим

$$d\mathbf{y}' = \alpha d\mathbf{y}, \quad (d\mathbf{y}')^2 \equiv (ds_y')^2 = (d\mathbf{y})^2 = ds_y^2, \quad ds_y' = ds_y, \quad (19.16)$$
$$\mathbf{y}_r' = \alpha\mathbf{y}_r, \quad (\mathbf{y}_r')^2 = (\mathbf{y}_r)^2, \quad \mathbf{y}_r \equiv \frac{d^r\mathbf{y}}{dt^r}, \quad \mathbf{y}_r' \equiv \frac{d^r\mathbf{y}'}{dt^r}, \quad r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Таким образом, длина дуги s_y и все производные вектора $\mathbf{y}$ по времени t по модулю сохраняются при *преобразовании вращения и отражения*, т. е. *внутренняя геометрия траектории вектора* $\mathbf{y}(t)$ в E_5 *сохраняется.*

Так как

$$|\mathbf{y}_r||\mathbf{y}_s|\cos(\mathbf{y}_r\mathbf{y}_s) \equiv \mathbf{y}_r\mathbf{y}_s = \mathbf{y}_r'\mathbf{y}_s' \equiv |\mathbf{y}_r'||\mathbf{y}_s'|\cos(\mathbf{y}_r'\mathbf{y}_s'),$$

то

$$|\mathbf{y}_r| = |\mathbf{y}_r'|, \quad \cos(\mathbf{y}_r\mathbf{y}_s) = \cos(\mathbf{y}_r'\mathbf{y}_s'), \quad (19.17)$$

следовательно, для векторов

$$\mathbf{y},\ \mathbf{y}_1 \equiv \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2},\ \ldots,\ \mathbf{y}_r = \frac{d^r\mathbf{y}}{dt^r},\ \ldots$$

при преобразованиях вращения и отражения сохраняются их длины и косинусы углов между ними. *Длина дуги и кривизны* всякой траектории $\mathbf{э}(t)$ в E_5 — это естественные *независимые внутренние параметры*

$$ds = |d\mathfrak{э}| = \tilde{v}dt, \quad \tilde{v} = \dot{s}, \quad \frac{d}{dt} = \dot{s}\frac{d}{ds}, \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{\dot{s}}\frac{d}{dt},$$

$$\varkappa^2 = \left|\frac{d^2\mathfrak{э}}{ds^2}\right|^2 = \frac{\dot{\tilde{v}}_{ij}\dot{\tilde{v}}_{ij} - (\dot{\tilde{v}})^2}{\tilde{v}^4}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \dot{s}\frac{d}{ds}\left(\dot{s}\frac{d}{ds}\right), \ldots \quad (19.18)$$

Рассмотрим косоугольный репер

$$\mathfrak{э}_1 \equiv \mathbf{p}_1 = \frac{d\mathfrak{э}}{ds}, \quad \mathfrak{э}_2 = \frac{d^2\mathfrak{э}}{ds^2} = \varkappa\mathbf{p}_2, \ldots, \mathfrak{э}_5 = \frac{d^5\mathfrak{э}}{ds^5}. \quad (19.19)$$

В E_5 траектория $\mathfrak{э}(t) = \mathfrak{э}(s)$, $s = s(t)$ кроме длины дуги и *главной кривизны* $\varkappa_1 = \varkappa$, выражающихся формулами (19.18), имеет еще три параметра кручения $(\varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4)$.

Ортогональный единичный естественный репер $\mathbf{p}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$ строится из векторов косоугольного базиса $\mathfrak{э}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$. Пять формул Френе с двучленными правыми частями имеют вид $(\varkappa_0 = \varkappa_5 \equiv 0)$

$$\mathbf{p}_n' = -\varkappa_{n-1}\mathbf{p}_{n-1} + \varkappa_n\mathbf{p}_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots, 5) \quad (19.20)$$

и позволяют выразить любую производную вектора $\mathfrak{э}$ по s, начиная с шестой, через $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_5$, т. е. через пять первых:

$$\frac{d^m\mathfrak{э}}{ds^m} = k_{mk}\frac{d^k\mathfrak{э}}{ds^k} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, 5, \\ m = 6,7 \ldots \text{ по } m \text{ не суммировать} \end{pmatrix}, \quad (19.21)$$

где k_{mk} зависят от $\varkappa_l$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ и их производных. Формулы (19.21) называются *тождествами размерности*. Поскольку дифференцирование по s и по t связаны между собой формулами (19.18), то (19.21) могут быть переписаны для векторов

$$\mathfrak{э}_{:n} = k_{mk}\mathfrak{э}_k \quad (m = 6, 7 \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots, 5), \quad (19.22)$$

причем k_{mk} зависят от s, $\varkappa_l$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ и их производных по t; существенно, что векторы $\mathfrak{э}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$ алгебраически линейно независимы, т. е. при любых числах b_k суммы $b_k\mathfrak{э}_k \neq 0$, кроме $b_k \equiv 0$.

Если дан какой-нибудь вектор $\mathfrak{э}_k(t)$, то процесс, т. е. вектор $\mathfrak{э}(t)$, находится интегрированием

$$\mathfrak{э}_0(t) \equiv \mathfrak{э}(t) = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{k-1}} \mathfrak{э}_k(\tau_k)\, d\tau_k,$$

следовательно, в качестве базиса можно взять любую пятерку векторов, например, $\mathfrak{э}_k = (\mathfrak{э}_0, \mathfrak{э}_1, \ldots, \mathfrak{э}_4)$.

Произвольный вектор $\mathbf{z}$, в том числе $\boldsymbol{\sigma}$ в E_5 можно представить через его компоненты в базисе $\mathfrak{э}_k$:

$$\boldsymbol{\sigma} = A^k \boldsymbol{\vartheta}_k \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{19.23}$$

причем это — тождество, если A^k выражены через $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\vartheta}_k$ формулами

$$A^k = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\vartheta}^k, \quad \boldsymbol{\vartheta}^k\boldsymbol{\vartheta}^l = \delta_l^k, \tag{19.24}$$

где $\boldsymbol{\vartheta}^k$ — контравариантный базис.

Базис (19.19) для представления 5-мерного вектора может быть заменен любым другим, построенным на основе $\boldsymbol{\vartheta}$, например

$$\eta_k = \int\limits_{t_0}^{t} N_k(t-\tau)\, d\boldsymbol{\vartheta}(\tau), \quad k = 1,\ 2, \ldots,\ 5, \tag{19.25$'$}$$

если функции времени $N_k(t)$ заданы и линейно-независимы; тогда (12.23) заменяется на

$$\boldsymbol{\sigma} = A_1^k \eta_k \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ 5). \tag{19.25}$$

Если ввести смешанный базис из производных по t от $\boldsymbol{\vartheta}$ и $\boldsymbol{\sigma}$, то будет справедливо соотношение

$$C_m \overset{m.}{\boldsymbol{\sigma}} = D_m \overset{m.}{\boldsymbol{\vartheta}} \left(\overset{m.}{\mathbf{z}} \equiv \frac{d^m \mathbf{z}}{dt^m}, \quad m = 0,\ 1,\ 2 \right), \tag{19.26}$$

которое при определенном выборе C, D будет тождеством, так как шесть векторов в E_5 линейно-зависимы. При этом, например, $D_1 = 1$ и входят только вторые производные.

Тело называется *начально изотропным*, если существует момент t_0, при котором его начальное состояние в декартовой системе $(\mathbf{x})$ характеризуется только единичным тензором второго ранга — константой $\tilde{E} = (\delta_{ij})$, $\delta_{ij} = \delta_j^i = \delta^{ij}$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ и тензорами других рангов вида

$$\delta_{ij}, \ \delta_{ij}\delta_{mn}, \quad \delta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jn}, \ldots . \tag{19.27}$$

Все соотношения между физическими функционалами для изотропного тела должны быть ковариантны относительно ортогональных преобразований $\hat{a}$ начальной (лагранжевой) системы координат $(\mathbf{x})$ *в теле*:

$$\mathbf{x} = \hat{a}\mathbf{x}' : \mathrm{x}^i = a_j^i \mathrm{x}'^j \quad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3);$$

$$\mathbf{x}' = \hat{a}'\mathbf{x} : \mathrm{x}'^i = a_j'^i \mathrm{x}^j; \quad \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}'^2 : a_j^i a_k^i = \delta_{jk};$$

$$\hat{a}\hat{a}' = \hat{a}'\hat{a} = E : a_j^i a_k'^j = a_k^j a_j'^i = \delta_k^i, \quad a_j'^i = a_i^j; \tag{19.28}$$

при этом $\hat{a} = \mathrm{const}$, т. е. не зависит от времени и координат. Тензоры ε_{ij}, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, s_{ij}, $\tilde{s}_{ij}$, ..., y_{ij}, ... преобразуются по формулам

$$\tilde{Y} : \hat{a}\tilde{Y}' : y_{ij} = a_i^m a_j^n y'_{mn}, \quad y'_{ij} = a_i'^m a_j'^n y_{mn} \tag{19.29}$$

и относительно преобразваний (19.28) имеют каждый три инварианта:

$$\mathcal{J}_{1y} = y_{kk}, \quad \mathcal{J}_{2y} = {}_{ij}y_{ij}, \quad \mathcal{J}'_{2y} = \frac{1}{2}(\mathcal{J}^2_{1y} - \mathcal{J}_{2y}),$$

$$\mathcal{J}_{3y} = y_{ik}y_{kj}y_{ji} \equiv 3\mathcal{J}'_{3y} + \frac{3}{2}\mathcal{J}_{1y}\mathcal{J}_{2y} - \frac{1}{2}\mathcal{J}^3_{1y}; \quad \mathcal{J}'_{3y} = |y_{ij}|; \tag{19.30}$$

пара тензоров y_{ij}, z_{ij} имеет еще смешанные инварианты

$$\mathcal{J}_{yz} = y_{ij}z_{ji}, \quad \mathcal{J}_{yyz} = y_{im}y_{mj}z_{ji}, \quad \mathcal{J}_{yzz} = y_{im}z_{mj}z_{ji}, \tag{19.30'}$$

тройка y_{ij}, z_{ij}, ζ_{ij} имеет, кроме (19.30), еще один

$$\mathcal{J}_{yz\zeta} = y_{im}z_{mj}\zeta_{ji}. \tag{19.30''}$$

Вообще группа из N тензоров $\overset{n}{y}_{ij}$ $(n = 1, 2, \ldots N)$ приводит к тензору второго ранга с компонентами Y^N_{ij} в виде произведения и линейному инварианту

$$Y^N_{ij} = \overset{1}{y}_{im_1} \ldots \overset{n}{y}_{m_{n-1}m_n} \ldots \overset{N}{y}_{m_Nj}, \quad Y^N = Y^N_{ij}\delta_{ij}. \tag{19.31}$$

Тождество Гамильтона — Кели (17.6) для любого тензора $\widetilde{Z} = (z_{ij})$

$$\widetilde{Z}^3 = \mathcal{J}_{1z}\widetilde{Z}^2 - \mathcal{J}'_{2z}\widetilde{Z} + \mathcal{J}'_{3z}E:$$

$$z_{im}z_{mn}z_{nj} = \mathcal{J}_{1z}z_{im}z_{mj} - \mathcal{J}'_{2z}z_{ij} + \mathcal{J}'_{3z}\delta_{ij} \tag{19.32}$$

позволяет любую изотропную функцию тензора $\widetilde{Z}$ представить трехчленом типа (17.9)

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{Z}, \widetilde{E}) = z_0\widetilde{E} + z_1\widetilde{Z} + z_2\widetilde{Z}^2, \tag{19.33}$$

где z_0, z_1, z_2 — функции инвариантов $\mathcal{J}_{1z}$, $\mathcal{J}_{2z}$, $\mathcal{J}_{3z}$. Следовательно, любую тензор-функцию N тензоров можно представить в виде суммы, содержащей по каждому из них выражения типа (19.33), затем — типа (19.30′) и, наконец, типа (19.31), причем каждое слагаемое будет содержать входящие в функцию тензоры в степени не более второй. Коэффициенты суммы будут функциями инвариантов типа (19.30) и независимых смешанных типа (19.31). Поскольку всякий девиатор на основании тождеств размерности (19.22) можно представить пятичленной формулой типа (19.23) или (19.25), то для изотропного тела девиатор любой тензор-функции тензоров $\overset{n}{y}_{ij}$ может быть преобразован к такому же пятичленному виду, например к виду (19.23); коэффициенты A^k при этом будут функционалами по t (или по s) инвариантов тензоров $\overset{n}{y}_{ij}$, тензоров скоростей $\dot{\overset{n}{y}}_{ij}$, ускорений $\ddot{\overset{n}{y}}_{ij}$ и т. д.

Основной постулат МСС утверждает, что задание процесса в точке M вполне определяет все физические функционалы (§ 11).

Поскольку процесс в точке M тела определяется единственным тензором деформаций $\tilde{\mathscr{E}}$ и скалярами T, β (§ 11), то (19.23) будет представлять функционал-девиатор состояния, если коэффициенты A^k из опытов будут найдены как функционалы $\tilde{\mathscr{E}}$, инвариантные относительно преобразований (19.29). Например, для аналитических процессов A^k $(k=1, 2, ..., 5)$ должны быть определимы как инвариантные *функции* $\tilde{\mathscr{E}}$ и всех производных по t от $\tilde{\mathscr{E}}$. Первые инварианты всей группы производных тензоров выражаются через инвариант $\varepsilon_{ij}\delta_{ij}=\varepsilon_{kk}$:

$$\varepsilon_{ij}\delta_{ij}=\varepsilon_{kk}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}\delta_{ij}=\dot{\varepsilon}_{kk}, \ldots \overset{m.}{\varepsilon}_{ij}\delta_{ij}=\overset{m.}{\varepsilon}_{kk}, \ldots . \tag{19.34}$$

Девиатор $\tilde{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3$ и его скорости, ускорения, ... имеют вторые инварианты, входящие в (19.18), (19.20):

$$\tilde{\mathscr{Y}}_{2v}=\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}=\tilde{v}^2\equiv\left(\frac{ds}{dt}\right)^2; \quad \tilde{\mathscr{Y}}_{2\dot{v}}=\ddot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\ddot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}=\varkappa^2\tilde{v}^4+(\dot{\tilde{v}})^2 \ldots (\varkappa\equiv\varkappa_1),$$

$$\tilde{\mathscr{Y}}_{\underset{2v}{m.}}=\tilde{\mathscr{Y}}_{2m}(s, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4). \tag{19.35}$$

Все они выражаются через производные всех порядков по времени от пяти внутренних характеристик траектории $\mathfrak{э}(t)$ в E_5. Третьи инварианты имеют вид (19.30″), где y_{ij}, z_{ij}, ζ_{ij} есть производные девиатора $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ различных порядков, включающие

$$\tilde{\mathscr{Y}}_{3m}=\overset{m.}{\tilde{\varepsilon}}_{ik}\overset{m.}{\tilde{\varepsilon}}_{kj}\overset{m.}{\tilde{\varepsilon}}_{ji}, \quad m=0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \tag{19.36}$$

не выражающиеся операторами по t от s, $\varkappa_1 \ldots \varkappa_4$, т. е. новые инварианты преобразования (19.29) и смешанные, в большинстве своем выражающиеся через (19.35), (19.36).

Весь набор третьих инвариантов (19.36) и смешанных обозначим

$$\tilde{\mathscr{Y}}_3=(\tilde{\mathscr{Y}}_{yz\zeta}), \quad \tilde{y}_{ij}=\overset{l.}{\tilde{\varepsilon}}_{ij}, \quad \tilde{z}_{ij}=\overset{m.}{\tilde{\varepsilon}}_{ij}, \quad \tilde{\zeta}_{ij}=\overset{n.}{\tilde{\varepsilon}}_{ij}, \ldots \tag{19.37}$$

Следовательно, основной постулат МСС применительно к начально изотропным средам приводит к уравнениям состояния (19.23) и

$$\mathscr{Y}_{1s}\equiv s_{ij}\delta_{ij}\equiv s_{ii}=A, \quad i, j=1, 2, 3, \tag{19.38}$$

в которых A, A^k суть физические функционалы параметров (19.34), (19.35), (19.36), т. е.

$$A^k = A^k[s(\tau),\ \varkappa_1(\tau),\ \ldots,\ \varkappa_4(\tau);\quad y_{1\varepsilon}(\tau),\quad T(\tau),\quad \beta(\tau);\quad \mathcal{J}_3(\tau)]_{t_0}^t,$$

$$A = A[s(\tau),\ \ldots,\ \tilde{\mathcal{J}}_3(\tau)]_{t_0}^t, \tag{19.39}$$

или, что то же, к (19.25), (19.26) и другим *изоморфным* (19.23), т. е. получающимся из (19.23) формальными преобразованиями на основании тождеств размерности (19.21).

Выраженный в виде формул (19.23), (19.38), (19.39) или им изоморфных основной постулат МСС для изотропных тел был назван *общим постулатом изотропии* и действительно полностью отображает свойство изотропной среды в физическом пространстве, так как ковариантен относительно преобразования (19.28), (19.29) системы координат и тензоров y_{ij} в теле.

Из построения 5-мерного пространства E_5 ясно, что при более общих ортогональных преобразованиях компонент вектора $\mathbf{y}$, а значит и компонент девиатора $\tilde{y}_{ij}$, в виде (19.13), т. е. *при ортогональных преобразованиях репера* $\mathbf{a}_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ 5$, *пятимерного пространства* E_5 все параметры — аргументы, входящие в скобках (19.39), кроме $\tilde{\mathcal{J}}_3$, — являются инвариантами значительно более общих, чем (19.29), преобразований репера $\mathbf{a}_k$ в E_5 (19.13) и сами выражения законов (19.23), (19.38) ковариантны относительно 10-параметрических преобразований (19.13). Как уже отмечено, преобразования (19.29) и связанные с заменой β_{kij} в (19.2) принадлежат к (19.13) и являются соответственно трехпараметрическими и однопараметрическими вращениями и отражениями.

Свойства некоторой среды определяются *частным постулатом изотропии* (или просто — *постулатом изотропии*), если A, A^k в (19.39), а значит и коэффициенты всех изоморфных (19.23) выражений функционалов состояния, не зависят от группы «третьих» инвариантов $\tilde{\mathcal{J}}_3$, т. е. они ковариантны относительно полной группы преобразований репера $\mathbf{a}_k$ (19.13), (19.14), (19.15) в E_5. В этом случае не только физическое пространство, но и *пространство* E_5 *изотропно*; э-образ физического процесса сохраняется при всех вращениях и отражениях в E_5, если в соответствующих точках траектории сохраняются значения параметров $\varepsilon_{kk}(t)$, $T(t)$, $\beta(t)$.

Опыты показывают, что свойства очень многих сплошных изотропных сред в области сравнительно малых деформаций и многих — при больших деформациях определяются постулатом изотропии. Эта особенность настолько сильно упрощает экспериментальные исследования физических функционалов начально изотропных сред и законов в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = A^k \mathbf{э}_k,\quad A^k = A^k[s,\ \varkappa,\ \mathcal{J}_{1\varepsilon},\ T,\ \beta]_{t_0}^t,$$

$$\mathcal{J}_{1s} = A[s,\ \varkappa,\ \mathcal{J}_{1s},\ T,\ \beta]_{t_0}^t,\quad \varkappa = (\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_3,\ \varkappa_4), \tag{19.40}$$

что становится возможным *прямой метод решения краевых задач МСС без знания аналитических представлений скалярных функционалов* A, A^k, но с помощью некоторых универсальных (не зависящих от типов краевых задач) экспериментальных установок*. При исследовании свойств новых сред естественно исходить из постулата изотропии и после выяснения степени точности (19.40) ставить задачу учета влияния инвариантов $\tilde{\mathcal{J}}_3$. Такое влияние в области больших деформаций имеется, например, в нелинейной теории упругости (§ 17): формулы (17.15) можно привести к виду (19.23), но в (19.39) явно войдут третьи инварианты (19.36) при $m=0, 1, 2, 3$.

Основные характеристики степени сдвиговой деформации и сложности изотермических процессов в точке M тела — это длина дуги s (19.12) и главная кривизна $\varkappa_1=\varkappa$ (19.18), развернутые выражения которых

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{\text{э}}\dot{\text{э}}}\,dt=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\tilde{v}_{ij}\tilde{v}_{ij}}\,dt,$$

$$\varkappa=\frac{\pm 1}{\tilde{v}^3}\sqrt{(\dot{\text{э}}\dot{\text{э}})(\ddot{\text{э}}\ddot{\text{э}})-(\dot{\text{э}}\ddot{\text{э}})^2}=\frac{\pm 1}{\tilde{v}^3}\sqrt{\tilde{v}_{ij}\tilde{v}_{ij}\dot{\tilde{v}}_{mn}\dot{\tilde{v}}_{mn}-(\tilde{v}_{ij}\dot{\tilde{v}}_{ij})^2}$$

$$(i,\ j,\ n,\ m=1,\ 2,\ 3) \qquad (19.41)$$

показывают, что они на основании результатов § 9 легко преобразуются к эйлеровым координатам, если $\tilde{v}_{ij}$ понимать как компоненты девиатора скорости деформации, а $\dot{\tilde{v}}_{ij}$ заменить на $\overset{\circ}{\tilde{v}}_{ij}$. В представлении (19.26), требующем существования только вторых производных по t от **э** и $\boldsymbol{\sigma}$, более удобны функционалы (по t) зависимые от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ инвариантные в E_5 характеристики траектории нагружения

$$s,\ q_1=\frac{d\text{э}}{ds}=\frac{d\,|\,\text{э}\,|}{|\,d\text{э}\,|},\quad q_2=\frac{|\,\sigma\,|}{\text{э}},\quad q_3=\frac{\sigma d\text{э}}{|\,\sigma\,|\,ds},\quad q_4=\frac{d\,|\,\sigma\,|}{|\,d\sigma\,|}, \qquad (19.42)$$

причем (при $D_1=1$) коэффициенты C_m, D_m — функционалы по t функций (19.42), $t_0\leqslant\tau\leqslant t$, а также $\mathcal{J}_{1\varepsilon}$ (или $\mathcal{J}_{1\sigma}$) и $T(\tau)$, $\beta(\tau)$.

* Возник в теории пластичности и назван «СН-ЭВМ»: СН — машина на сложное нагружение, реализующая различные э-образы, ЭВМ — электронно-вычислительная машина.

Условие ковариантности общего функционала состояний $\hat{S} = \mathcal{F}[\tilde{\mathcal{E}}]$ относительно преобразований (19.29), т. е. сохранение его вида при замене $\tilde{S} = \hat{a}\tilde{S}'$, $\tilde{\mathcal{E}} = \hat{a}\tilde{\mathcal{E}}'$ означает, что $\tilde{\mathcal{F}}$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\tilde{\mathcal{F}}[\hat{a}\tilde{Y}] = \hat{a}\tilde{\mathcal{F}}[\tilde{Y}]. \tag{19.43}$$

Функционалы (12.23), (19.25), (19.26) с коэффициентами вида (19.39) удовлетворяют уравнению (19.43).

§ 20. Малые упругопластические деформации начально изотропных твердых тел

Если напряжения в начально изотропном твердом теле ограничены условием пластичности (§ 18), то под действием нагрузок при $\sigma_u < \sigma_s$ оно обычно ведет себя как идеально упругое (§ 16). Ниже имеются в виду металлы и сплавы при нормальных температурах, но многие другие тела обладают такими же свойствами. Под действием больших давлений $p > \sigma_s$ объем деформируется упруго и даже линейно, так что связь между инвариантами $\theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ и $3p = -\sigma_{ij}\delta_{ij}$ определяется объемным законом Гука:

$$p = -K\theta_T, \quad \theta_T = \theta - 3\alpha\vartheta, \quad \vartheta = T - T_0, \tag{20.1}$$
$$S^{ij} = s_{ij} = \sigma_{ij}, \quad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}.$$

При этом предполагаются лишь небольшие изменения температуры, при которых предел текучести σ_s и модуль K не изменяются; для сталей, например, $\vartheta = T - T_0$ может изменяться на 200°C. Давления p порядка или меньше σ_s не влияют на K и σ_s, хотя при больших давлениях увеличение p сопровождается ростом σ_s.

Деформации сдвига остаются обратимыми упругими только при $\sigma_u < \sigma_s$, причем связаны с девиатором $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$ законом Гука

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2G\tilde{\varepsilon}_{ij}. \tag{20.2}$$

При $\sigma_u \geqslant \sigma_s$ связь $\tilde{\sigma}_{ij} \sim \tilde{\varepsilon}_{ij}$ ($\sigma \sim$ э) становится сложной, нелинейной (§ 19), однако свойства тел остаются *склерономными*, т. е. в них нет явлений ползучести и релаксации. Это значит, что вместо времени t может быть взят любой параметр λ, монотонно возрастающий по t и определяющий последовательность состояний вещества.

Соотношение $\tilde{\sigma}_{ij} \sim \tilde{\varepsilon}_{ij}$, принимаемые в современной теории пластичности, могут быть приведены к одному из следующих двучленных типов.

Тип $d\boldsymbol{\sigma} \sim d\boldsymbol{э}$:

$$d\boldsymbol{\sigma} = N d\boldsymbol{э} - (N - P)\frac{\sigma d э}{\sigma^2}\boldsymbol{\sigma}, \qquad (20.3)$$

причем N и P — функции длины дуги s и параметра деформации q_ε или функционалы q_Σ по s или по t:

$$N = N(s,\ q_\varepsilon), \quad P = P(s,\ q_\varepsilon), \quad ds = |d\boldsymbol{э}| = \sqrt{d\tilde{\varepsilon}_{ij} d\tilde{\varepsilon}_{ij}}, \qquad (20.4)$$

$$q_\varepsilon = \frac{\boldsymbol{э} d\boldsymbol{э}}{э\, ds} = \frac{dэ}{ds} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{ij} d\tilde{\varepsilon}_{ij}}{э\, ds}.$$

Тип $d\boldsymbol{э} \sim d\boldsymbol{\sigma}$:

$$d\boldsymbol{э} = \frac{1}{N} d\boldsymbol{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N}\right)\frac{\sigma d\sigma}{\sigma^2}\boldsymbol{\sigma}, \qquad (20.5)$$

причем N и P — функции длины дуги Σ и параметра нагружения q_σ:

$$N = N(\Sigma,\ q_\sigma), \quad P = P(\Sigma,\ q_\sigma), \quad d\Sigma = |d\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{d\tilde{\sigma}_{ij} d\tilde{\sigma}_{ij}},$$

$$q_\sigma = \frac{\boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\sigma}}{\sigma d\Sigma} = \frac{d\sigma}{d\Sigma} = \frac{\tilde{\sigma}_{mn} d\tilde{\sigma}_{mn}}{\sigma d\Sigma}. \qquad (20.6)$$

Теория малых упругопластических деформаций (у. п. д.) основана на свойствах процессов простого нагружения-разгрузки, которые с большой точностью реализуются в теле, если его нагружения-разгрузки просты, т. е. все внешние силы, произвольные по координатам $(\mathbf{x})$, во времени возрастают и убывают пропорционально одному общему параметру λ. В E_5 для каждой точки M тела такой процесс изображается движением конца вектора $\boldsymbol{э}$ вдоль какого-то своего луча и потому

$$\boldsymbol{\sigma} = B\boldsymbol{э}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = B\tilde{\varepsilon}_{ij}, \qquad (20.7)$$

причем B — функционал единственного независимого параметра q_ε (20.4) по длине дуги s.

Обозначим $q_\varepsilon(s) = q$ и назовем *алгебраическим модулем деформаций* при простых нагружениях-разгрузках величину $э_a$, связанную с $э$ и $q(s)$ соотношениями

$$dэ_a = dэ; \quad q = \frac{dэ}{ds} = \pm 1;$$

$$э_a = \int_0^s q(s')\, ds'; \quad э = |э_a|. \qquad (20.8)$$

Пусть $\mathbf{P}_0$ — определенный постоянный единичный вектор на траектории $\boldsymbol{э}(s)$. Тогда, очевидно, при простых нагружениях-разгрузках

$$э(s) = э_a(s)\mathbf{P}_0. \tag{20.9}$$

Алгебраическим модулем напряжений σ_a назовем величину, определяемую равенством

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_a \mathbf{P}_0, \quad \sigma = |\sigma_a|. \tag{20.10}$$

Из (20.7) находим выражение B:

$$B = \frac{\sigma_a}{э_a} = \frac{1}{э_a}\sigma_a[q(s')]_0^s. \tag{20.11}$$

Поскольку $э_a$ — известный функционал $q(s)$ (20.8), задача определения функционала B сводится к определению функционала $\sigma_a[q]$.

Свойства *функционала пластичности* B и его представление для каждого материала при заданной постоянной температуре T могут быть установлены в опытах на кручение тонкостенного трубчатого образца моментом $M_{\text{кр}}$. Единственные отличные от нуля компоненты тензора напряжений и деформаций

$$\sigma_{12} = \tilde{\sigma}_{12} = \frac{M_{\text{кр}}}{2\pi R^2 h}, \quad 2\varepsilon_{12} = 2\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{\varphi l}{R}, \tag{а}$$

где R — средний радиус, h — толщина стенки, l — длина трубки, φ — угол закручивания трубки на длине l.

Выражения основных величин через σ_{12}, ε_{12}:

$$\sigma_a = \sigma_{12}\sqrt{2}, \quad э_a = \varepsilon_{12}\sqrt{2} = \int_0^s q(s')\,ds', \quad B = \frac{\sigma_a}{э_a}. \tag{б}$$

На рис. 20.1 показаны результаты испытания. Так как направления кручения равноправны, картина в первой и третьей четвертях одинакова. В пределах участка OA_s $\sigma_a = 2Gэ_a$ $(-э_s < э_a < э_s$, $э_s = \sqrt{1{,}5}\varepsilon_s)$. При движении от точки A_s к A_1 и далее зависимость определяется универсальной кривой *активной деформации*

$$\sigma_a = \Phi(э_a), \quad B = \frac{\Phi(э_a)}{э_a}, \quad q = +1. \tag{в}$$

Если в точке A_1 $(э_a = э = э_a^1)$ уменьшать деформацию $э_a$, то напряжение будет убывать по прямой A_1A_s' с наклоном $2G$, т. е. для *пассивной деформации*

$$\sigma_a^1 - \sigma_a = 2G(э_a^1 - э_a)$$

или

$$B = 2G - \frac{2Gэ_a^1 - \Phi(э_a^1)}{э_a}, \quad э_a^1 - 2э_s \leqslant э_a \leqslant э_a^1 \geqslant э_s, \tag{г}$$

где $э_s = \sqrt{1{,}5}\varepsilon_s$, ε_s — константа материала (у сталей $\sim 10^{-3}$). При дальнейшем уменьшении $э_a$ кривая $A_s'A_2$ одинакова с A_sA_1 и называется участком *вторичных пластических деформаций.*

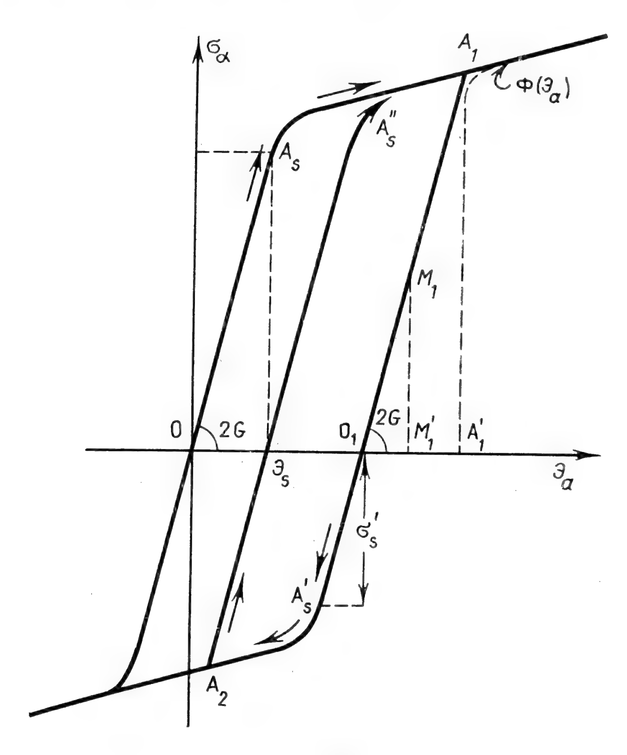


Рис. 20.1

Ограничиваясь простым нагружением OA_sA_1 и упругой разгрузкой A_1A_s', закон связи (20.7) можем записать в виде

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\Phi(э)}{э}\tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \frac{dэ}{dt} > 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}^1_{ij} = 2G(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \tilde{\varepsilon}^1_{ij}), \quad \frac{dэ}{dt} < 0. \qquad (20.12)$$

В общем случае функционал $B[q]$ строится на основании диаграммы (рис. 20.1) так: параметру s задаем непрерывно возрастающие значения от 0 до любого значения $<0{,}1$ (пластические деформации возникнут при $s > э_s$) и задаем программу нагружений-разгрузок, т. е. функцию $q(s) = \pm 1$, например

$$q=1,\quad 0\leqslant s'<s_1;\quad q=-1,\quad s<s'<s_2;\ q=+1,\ s_2<s'<s_3,\ \ldots,\tag{20.13}$$

находим $э_a(s)$, т. е. «путь» на диаграмме рис. 20.1:

$$э_a(s)=\int\limits_0^s q(s')\,ds'=\left|\begin{array}{l}=s\leqslant s_1\\ =2s-s_1,\quad s_1\leqslant s\leqslant s_2\\ =s-2(s_2-s_1),\quad s_2\leqslant s\leqslant s_3.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.\tag{20.14}$$

Следуя этим путем изменения $э_a$ по s, найдем соответствующие $\sigma_a(s)$ и $B(s)=\sigma_a/э_a$.

Соотношения (20.1), (20.12) можно записать в общей форме, если ввести вместо функций $\sigma=\Phi(э)$ обратную ей $э=\Phi^{-1}(\sigma)$ и обозначить отношение

$$\frac{\Phi^{-1}(\sigma)}{\sigma}=\frac{1+\varphi(\sigma)}{2G}.\tag{20.15}$$

Тогда деформацию ε_{ij} можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{(e)}+\varepsilon_{ij}^{(p)},\tag{20.16}$$

причем

$$\varepsilon_{ij}^{(e)}=\frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij}+\frac{3\nu}{1+\nu}\,p\delta_{ij}\right)=\frac{1}{2G}\left(\tilde{\sigma}_{ij}-\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,p\delta_{ij}\right),$$
$$\varepsilon_{ij}^{(p)}=\frac{\varphi(\sigma)}{2G}\,(\sigma_{ij}+p\delta_{ij})=\frac{\varphi(\sigma)}{2G}\,\tilde{\sigma}_{ij},\tag{20.17}$$

где ν — коэффициент Пуассона. Обозначая $\sigma^s=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_s$, из вида функции $\Phi(э)$ и $\Phi^{-1}(\sigma)$ (рис. 20.1) заключаем, что при активном нагружении $\left(\frac{d\sigma}{dt}>0\right)$ $\varphi(\sigma)=0$, $\sigma<\sigma^s$, и возрастает вдоль кривой A_sA_1. В точке A_1 отрезок OA_1' представляет полную деформацию $\varepsilon_{12}(A_1)$, отрезок OO_1 — пластическую деформацию $\varepsilon_{12}^{(p)}(A_1)$, отрезок O_1A_1' — упругую деформацию $\varepsilon_{12}^{(e)}(A_1)$. При разгрузке $\left(\frac{d\sigma}{dt}<0\right)$ из точки A_1 текущая OM_1' деформация ε_{12} состоит из той же пластической $\varepsilon_{12}^{(p)}(A_1)$ плюс упругая O_1M_1', т. е. $\varepsilon_{12}^{(e)}=\sigma_{12}/2G$. Таким образом, на всем пути $OA_sA_1O_1A_s'$ (и обратно на $A_s'O_1A_1$) формула (20.16) остается правильной, только на пути $A_1O_1A_s'$ (и $A_s'O_1A_1$) пластическая деформация $\varepsilon_{ij}^{(p)}(A)$ заморожена, т. е. остается равной $\varepsilon_{ij}^{(p)}(A_1)$

$$\varepsilon_{ij}^{(p)}=\frac{\varphi(\sigma^1)}{2G}\,(\sigma_{ij}^1+p^1\delta_{ij}).$$

Законы упруго-пластических деформаций, установленные выше, дают выражения напряжений $\sigma_{ij}=\tilde{\sigma}_{ij}-p\delta_{ij}$ через деформации $\varepsilon_{ij}=\tilde{\varepsilon}_{ij}+{}^1/_3\theta\delta_{ij}$, а значит, и через перемещения u_i; уравнения движения при этом образуют замкнутую систему.

Теорией пластического течения обычно называется вариант соотношений (20.5) при $N=2G=\mathrm{const}$ и P, зависящем от напряжения σ, пластической деформации

$$Э^{(p)}=\sqrt{\varepsilon_{ij}^{(p)}\varepsilon_{ij}^{(p)}}$$

или работы на пластических деформациях

$$W_p=\int \sigma dЭ^{(p)},$$

но не от q_σ (20.6).

Без этих ограничений функции N, P исследованы: для процессов деформации малой кривизны $\varkappa \ll h^{-1}$, где h порядка $(3\sim 10)\,\varepsilon_s$; средней кривизны $\varkappa\sim h^{-1}$; процессов в виде «веера» двухзвенных ломаных.

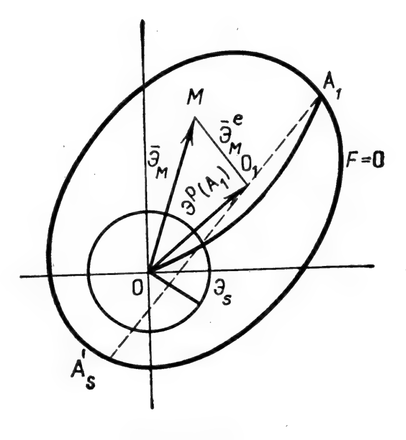


Рис. 20. 2

В точке O_1 (рис. 20.1) при разгрузке из A_1 напряжение исчезает, при возвратном процессе из O_1 в A_1 деформация упругая, точки A_1 и A_s' — новые пределы упругости в состоянии O_1. Такое же явление наблюдается и в общем случае в пространстве E_5. На рис. 20.2 показана сфера радиуса $Э_s$, внутри которой деформации упругие ($\sigma=2GЭ$).

Любой процесс OA_sA_1 сопровождается пластическими деформациями (A_s — любая точка на сфере)

$$Э^{(p)}=Э-Э^{(e)},\quad Э^{(e)}=\frac{\sigma}{2G}. \tag{20.18}$$

Продолжая процесс из A_1, обнаружим, что $Э^{(p)}$ для одних направлений A_1A_1' продолжают изменяться, но для других A_1A_1'' они остаются постоянными. Граница, разделяющая область продолжающихся пластических деформаций от области, где они «заморожены», называется *поверхностью текучести* для процесса OA_sA_1

$$\mathcal{F}_{OA_1}=\mathcal{F}(Э)=0. \tag{20.19}$$

Существует такое направление разгрузки $A_1O_1A_s'$ (рис. 20.2), для которого упругая деформация в точке O_1 полностью исчезнет, и вектор $\mathbf{OO}_1 = \text{э}^{(p)}$ будет представлять замороженную пластическую деформацию для перехода из A_1 в любую точку M. Таким образом, всякий процесс движения точки $M(\text{э}_м)$ внутри $\mathcal{F} = 0$ упруго обратим, причем $\text{э}^{(p)} = \text{const} = \text{э}^{(p)}(A_1)$; вектор $\mathbf{O}_1\mathbf{M} = \text{э}_м^{(e)}$ представляет упругую деформацию в точке M.

Постулат пластичности: на всяком замкнутом в E_5 по деформациям *изотермическом* процессе работа напряжений неотрицательна:

$$A = \int_{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \oint_{\text{э}} \sigma d\text{э} - \oint_{\theta} p d\theta = \oint_{\text{э}} \sigma d\text{э} \geqslant 0. \qquad (20.20)$$

Работа давления $p = -K\theta$ исчезает, так как $-pd\theta = K/2d(\theta^2)$. Из основного термодинамического соотношения $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = \rho_0 d\psi + w^*dt$ для всякого замкнутого по параметрам состояния $\mu(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ процесса имеем

$$w^* \geqslant 0, \quad A_\mu = \oint_{\mu} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \oint_{\mu} w^* dt \geqslant 0,$$

так как интеграл от $d\psi(\mu)$ равен нулю. Отсюда, однако, не следует (20.20), так как ε_{ij} при пластических деформациях не являются параметрами μ, т. е. процесс, замкнутый по ε_{ij}, не замкнут по μ, и потому $A_\mu \neq A$. Если предположить, что при $T = \text{const}$ $\mu = \text{э}^{(e)}$ и $w^*dt = \sigma d\text{э}^{(p)}$, то получим $\boldsymbol{\sigma} = 2G\text{э}^{(e)}$, $\boldsymbol{\sigma} d\text{э}^{(p)} \geqslant 0$.

Рассмотрим замкнутый по деформациям процесс $MTPTM$ (рис. 20.3), выходящий на $d\text{э}_T$ в точке T за пределы поверхности $\mathcal{F} = 0$ и потому дающий приращение пластической деформации $d\text{э}^{(p)}$. Для прямого MTP и обратного PTM путей э одинаково, $d\text{э}$ меняет знак на обратный, и потому

$$A = \int_{MT} (\sigma_{MT} - \sigma_{TM}) d\text{э} + \int_{TP} (\sigma_{TP} - \sigma_{PT}) d\text{э}. \qquad (20.21)$$

Поскольку $\mathbf{TP} = d\text{э}_T$ бесконечно мал, то и изменение $\boldsymbol{\sigma}_{TP} - \boldsymbol{\sigma}_{PT}$ будет бесконечно малым, и потому второе слагаемое в (20.21) может быть отброшено. На MT упругая деформация обозначена $\text{э}_{(+)}^{(e)}$, на обратном — $\text{э}_{(-)}^{(e)}$; их разность

$$\text{э}_{(+)}^{(e)} - \text{э}_{(-)}^{(e)} \equiv \frac{\sigma_{MT} - \sigma_{TM}}{2G} = d\text{э}^{(p)},$$

и потому

$$\frac{1}{2G} A = \int_{MT} d\text{э}^{(p)} d\text{э} = d\text{э}^{(p)} \int_{MT} d\text{э} = d\text{э}^{(p)} \mathbf{MT},$$

причем $d\text{э}^{(p)}$ зависит только от $d\text{э}_T$ и точки T на $\mathcal{F}=0$, но не от точки M. Следовательно, для любого вектора **МТ** внутри $\mathcal{F}=0$

$$\mathbf{MT}\,d\text{э}^{(p)} \geqslant 0; \qquad (20.22)$$

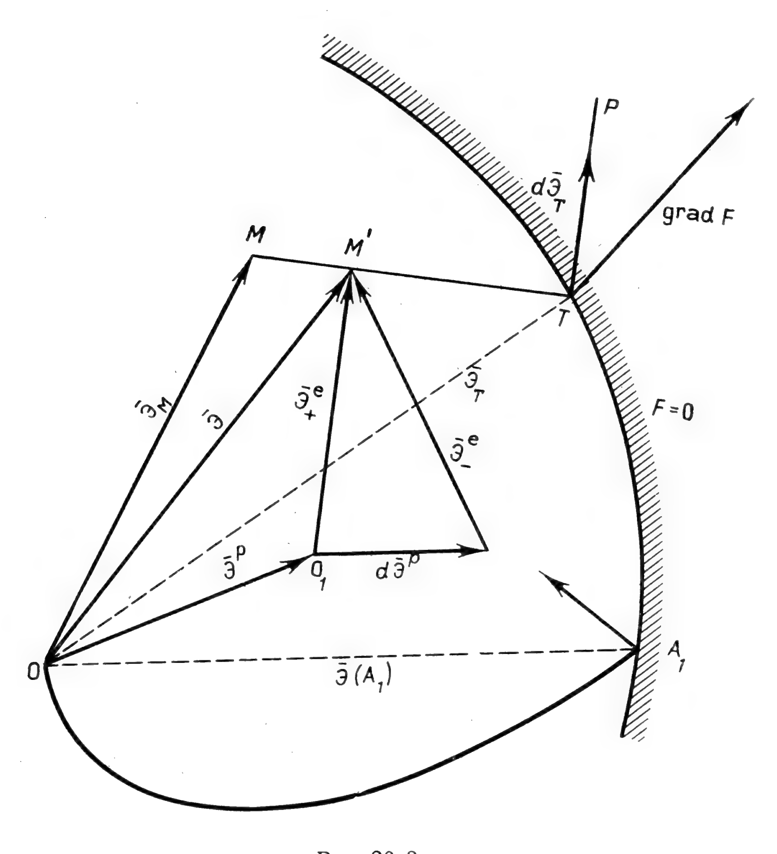


Рис. 20. 3

но это возможно только при условии, если $d\text{э}^{(p)}$ имеет направление, совпадающее с нормалью к $\mathcal{F}$ в точке T, т. е.

$$d\text{э}^{(p)} = D\,\mathrm{grad}\,\mathcal{F}(\text{э})\,d\lambda_1 = D_1 \boldsymbol{\nu}\,d\lambda, \qquad (20.23)$$

где D — некоторый функционал процесса OA_1 и точки T (любой на $\mathcal{F}$), λ — параметр, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали в точке $\text{э}=\text{э}_T$ к поверхности $\mathcal{F}=0$,

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{a}_k \nu_k, \quad \nu_k \nu_k = 1 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5).$$

Соотношение (20.23) называется *ассоциированным с* (20.19) *законом текучести*, и оно есть частный случай общего выражения закона связи $\tilde{\sigma} \sim \tilde{э}$ (19.26), но содержит не пять, а только два скалярных функционала: $\mathcal{F}$ и D.

Поскольку деформация э связана с напряжением σ физическим законом $э = э[\sigma]$, то при такой замене поверхность (20.19) преобразуется к виду

$$\mathcal{F}(э) = \mathcal{F}(э[\sigma]) = f(\sigma) = 0$$

и называется *поверхностью нагружения.*

Теория Прандля — Рейсса получается в предположении, что вектор упругой деформации $э_T^{(e)} = э^{(e)}$, соединяющий точку O_1 с T, имеет постоянную длину

$$|э^{(e)}| = |э - э^{(p)}| = \text{const} = \frac{\sigma^s}{2G} = э_s,$$

т. е.

$$2\mathcal{F} = (э - э^{(p)})^2 - э_s^2 = 0. \tag{20.24}$$

Отсюда

$$\operatorname{grad} \mathcal{F} = э - э^{(p)} = \frac{\sigma}{2G}.$$

Из (20.23) получаем частный вид (19.26)

$$\frac{dэ}{dt} = \frac{1}{2G}\frac{d\sigma}{dt} + \sigma\dot{\lambda}, \quad |\sigma| = \sigma^s = \text{const}, \tag{20.25}$$

где $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$ — неопределенный параметр. В девиаторной форме соотношения (20.25) имеют вид

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2G}\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}\dot{\lambda}, \quad \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij} = (\sigma^s)^2 \tag{20.26}$$

и представляют шесть независимых уравнений, связывающих σ_{ij} с ε_{ij} и $\dot{\lambda}$. Присоединяя к ним $p = -K\theta$ и уравнения движения $\rho(\ddot{u}_i - X_i) = \sigma_{ij,j}$, получаем замкнутую систему. При разгрузке $\dot{\lambda} = 0$. Заменой $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \to \tilde{v}_{ij}$, $\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} \to \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{ij}$ (§ 9) получаем теорию Прандтля — Рейсса в эйлеровом пространстве для конечных деформаций.

§ 21. Линейная теория вязкоупругости

Линейная теория изотропной вязкоупругой среды относится к твердым телам со свойствами, которые в области малых деформаций весьма близки к свойствам полимерных материалов: натурального и синтетического каучуков, аморфных полимеров с ма-

лыми и большими молекулярными весами и других. В зависимости от температуры для этих материалов характерны стеклообразные состояния при низких температурах, когда они почти идеально упруги, и высокоэластические состояния при повышенных температурах, когда они значительно деформируются при малых напряжениях и имеют сильно выраженные временные свойства (релаксацию, ползучесть). Таким образом, все промежуточные состояния относятся к области практически распространенных температур. Теория относится и к другим телам как приближенно аппроксимирующая их *реономные* свойства.

Рассматриваемая среда линейна, т. е. в общем представлении функционала $\mathcal{F}$ сохраняется лишь один линейный функционал $\mathcal{F}_1$. Применяя такое представление к девиатору $\tilde{\sigma}_{ij}$ и среднему давлению p, получим основные соотношения линейной теории вязкоупругости *:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(t) = \int_{0-}^{t} \tilde{\Gamma}(t-\tau)\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau)\,d\tau, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}(0-) = \tilde{\sigma}_{ij}(0-) = 0, \tag{21.1}$$

$$-p(t) = \int_{0-}^{t} \tilde{\Gamma}_1(t-\tau)\,\theta(\tau)\,d\tau.$$

Функции $\tilde{\Gamma}(t-\tau)$, $\tilde{\Gamma}_1(t-\tau)$, универсальные для данного вещества, называются соответственно ядрами сдвиговой и объемной релаксации. Вместо двух аргументов (t, τ) в них входит лишь разность $(t-\tau)$, что есть следствие предположения о независимости свойств от начала отсчета времени ($t_0=0$, $t_0\neq0$). Рассматривая (21.1) как интегральные уравнения Вольтерра относительно деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\theta(t)$ и учитывая их разрешимость (ядра $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_1$ таковы, что они *должны* быть разрешимы, так как задание процесса нагружения $\sigma_{ij}(t)$ согласно постулату вполне определяет деформацию), получим

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(t) = \int_{0}^{t} \tilde{K}(t-\tau)\,\tilde{\sigma}_{ij}(\tau)\,d\tau,$$

$$-\theta(t) = \int_{0}^{t} \tilde{K}_1(t-\tau)\,p(\tau)\,d\tau. \tag{21.2}$$

* $\tau=0_-$, $\tau=0_+$ означают стремление к нулю слева и справа; далее $\tau=0$ в пределе интеграла понимать как $\tau=0_-$.

Соотношения (21.1), (21.2) в качестве частного случая должны содержать обычный закон Гука. Мало того, если процесс деформации или нагружения производить очень быстро в интервале $0 \sim t \to 0_+$, то рассматриваемые материалы обладают идеальной упругостью. Таким образом, если деформацию $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ мгновенно ($t \to 0_+$) увеличить от нуля до конечной величины $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, то должно быть $\tilde{\sigma}_{ij} = 2G\tilde{\varepsilon}_{ij}$. На основании (21.1) это возможно только в том случае, если ядро $\tilde{\Gamma}$ обладает свойством δ-функции Дирака.

Соотношения (21.2) справедливы для произвольного процесса нагружения. Полагая $\tilde{\sigma}_{ij}(t) = c_{ij}\delta(t)$, $-p(t) = c\delta(t)$, где c_{ij}, c — постоянные, находим из (21.2)

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(t) = c_{ij}\tilde{K}(t), \quad \theta(t) = c\tilde{K}_1(t).$$

Внося все эти значения в (21.1) и сокращая постоянные, получим интегральные уравнения, связывающие между собой $\tilde{K}$ и $\tilde{\Gamma}$:

$$\int_0^t \tilde{K}(\tau)\tilde{\Gamma}(t-\tau)\,d\tau = \delta(t),$$
$$\int_0^t \tilde{K}_1(\tau)\tilde{\Gamma}_1(t-\tau)\,d\tau = \delta(t). \tag{21.3}$$

Легко проверить, что если внести значения $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, θ (21.2) под интегралы в (21.1) и потребовать, чтобы последние стали тождествами при любых $\sigma_{ij}(t)$, $\sigma(t)$, можно получить интегральные уравнения (21.3).

Теперь можно исключить особенности в ядрах $\tilde{K}$ и $\tilde{\Gamma}$, полагая

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{2G}\delta(t) + K(t),$$
$$\tilde{\Gamma}(t) = 2G\delta(t) - \Gamma(t), \tag{21.4}$$

$$\tilde{K}_1(t) = \frac{1}{K}\delta(t) + K_1(t),$$
$$\tilde{\Gamma}_1(t) = K\delta(t) - \Gamma_1(t), \tag{21.5}$$

где K, G — постоянные, называемые мгновенными **модулями,** K, **Г — регулярные** функции. Из (21.1) получим

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\tilde{G}\varepsilon_{ij} - \int_0^t \Gamma(t-\tau)\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau)\,d\tau,$$

$$-p = K\theta - \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)\theta(\tau)\,d\tau. \tag{21.6}$$

Из (21.2) получим

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{2G} + \int_0^t K(t-\tau)\tilde{\sigma}_{ij}(\tau)\,d\tau,$$

$$-\theta = \frac{p}{K} + \int_0^t K_1(t-\tau)p(\tau)\,d\tau. \tag{21.7}$$

Интегральные уравнения (21.3) для регулярных ядер примут вид

$$K(t) = \Gamma(t) + \int_0^t K(\tau)\Gamma(t-\tau)\,d\tau,$$

$$K_1(t) = \Gamma_1(t) + \int_0^t K_1(\tau)\Gamma_1(t-\tau)\,d\tau. \tag{21.8}$$

Ядро $K(t)$ можно найти из *опыта на ползучесть*, после чего резольвенту $\Gamma(t)$ — из (21.8). Но резольвенту $\Gamma(t)$ можно также найти из *опыта на релаксацию* и проверить соответствие опыта и теории. Ядра K_1, Γ_1 определять трудно, так как полимерные материалы малосжимаемы. При условии несжимаемости ($K=\infty$, $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$, следовательно, $\tilde{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon_{ij}$), пренебрегая объемной ползучестью ($K_1=\Gamma_1=0$), будем иметь первые из соотношений (21.6), (21.7), (21.8).

Рассмотрим случай простого растяжения образца вдоль оси x_1, когда $\sigma_{ij}=0$ при всех i, j кроме $i=j=1$, причем $\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{11}$, остальные $\varepsilon_{ij}=0$. Обозначая $\sigma_1=\sigma_{11}$ — растягивающее напряжение, $\varepsilon_{11}=\varepsilon_1$ — удлинение, из (21.6), (21.7) найдем

$$\sigma_1(t) = 3G\varepsilon_1(t) - \frac{3}{2}\int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon_1(\tau)\,d\tau,$$

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\sigma_1(t)}{3G} + \frac{2}{3}\int_0^t K(t-\tau)\sigma_1(\tau)\,d\tau. \tag{21.9}$$

В опыте на *ползучесть* быстро прикладывается и поддерживается постоянное напряжение $\sigma_1=\text{const}$ и наблюдается рост деформации $\varepsilon_1(t)$. Из второго соотношения (21.9) находим

$$K(t)=\frac{3}{2\sigma_1}\,\frac{d\varepsilon_1(t)}{dt},$$

т. е. ядро $K(t)$ пропорционально скорости ползучести, причем оно не должно зависеть от величины приложенного напряжения σ_1 (т. е. K одинаково при σ_1', σ_1'', ...).

В опыте на *релаксацию* мгновенно удлиняют образец до деформации $\varepsilon_1=\text{const}$, которая сохраняется постоянной, и наблюдают падение напряжения. Из первого соотношения (21.9) находится $\Gamma(t)$. Найденные в этих опытах $K(t)$, $\Gamma(t)$ используются во всех задачах МСС для данного материала.

В *модели Максвелла* принимается $\frac{2}{3}K(t)=\frac{1}{3Gt_r}=\text{const}$, причем постоянная t_r называется *временем релаксации.* В этом случае второе уравнение (21.9) имеет вид

$$3G\dot{\varepsilon}_1-\dot{\sigma}_1=\frac{1}{t_r}\sigma_1;$$

решая его относительно σ_1, найдем

$$\sigma_1=3G\varepsilon_1-\frac{3G}{t_r}\int\limits_0^t e^{-\frac{t-\tau}{t_r}}\,\varepsilon_1(\tau)\,d\tau.$$

Следовательно, ядро релаксации $\Gamma=2G/t_r\exp(-t/t_r)$. Ползучесть ($\sigma_1=\text{const}$) этой модели идет с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon}_1=\text{const}$, а релаксация напряжения (при $\varepsilon_1=\text{const}$) — экспоненциально. За время релаксации t_r напряжение σ_1 убывает в $e=2{,}71828$ раза.

Соотношения (21.6), (21.7) чаще используются в виде

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_{ij}(t)=\int\limits_0^t R(t-\tau)\,d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau),\quad -p=\int\limits_0^t R_1(t-\tau)\,d\theta(\tau),\\ \tilde{\varepsilon}_{ij}(t)=\int\limits_0^t \Pi(t-\tau)\,d\tilde{\sigma}_{ij}(\tau),\quad -\theta=\int\limits_0^t \Pi_1(t-\tau)\,dp(\tau),\end{gathered}\tag{21.10}$$

к которому они на основании начальных условий:

$$\begin{gathered}t=0_-,\ \tilde{\sigma}_{ij}=p=\tilde{\varepsilon}_{ij}=\theta=0,\\ R(0)=2G,\ R_1(0)=K,\end{gathered}\tag{21.11}$$

$$R(0)\,\Pi(0) = R_1(0)\,\Pi_1(0) = 1$$

приводятся заменой

$$\Gamma(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = -R'(t),\ \Gamma_1 = -R_1'(t),$$

$$K(t) = \Pi'(t),\ K_1(t) = \Pi_1'(t). \tag{21.12}$$

R и Π называются соответственно приведенными *функциями релаксации и ползучести.* Относя ординаты каждый из кривых ε_1', ε_1'' (рис. 21.1) к $2\sigma_1'/3$, $2\sigma_1''/3$, убедимся, что они сольются в одну кривую, которая и есть функция ползучести $\Pi(t)$.

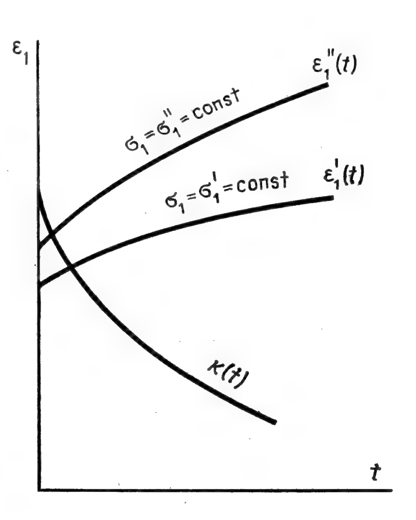


Рис. 21. 1.

При небольших изменениях температуры $T = T_0 + \vartheta(t)$ функции R и Π в линейной по σ_{ij}, ε_{ij} и ϑ теории не должны зависеть от ϑ, соотношения (21.10) сохранятся, если только объемную деформацию θ заменить на

$$\theta_T = \theta - 3\alpha\vartheta. \tag{21.13}$$

Для простоты, пренебрегая объемной ползучестью, т. е. полагая $R_1(t) = K = \text{const}$, $R_1\Pi_1 = 1$, получим

$$p = -K\theta_T,\ \tilde{\sigma}_{ij} = \int\limits_0^t R(t-\tau)\,d\,\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau). \tag{21.14}$$

В линейной теории свободную энергию ψ следует считать квадратичным функционалом деформаций и температуры $\vartheta = T - T_0$ (§ 11). Но ϑ и $\theta_T = \theta - 3\alpha\vartheta$ являются термодинамическими параметрами состояния, $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t)$ — внешними параметрами. Следовательно, можно написать для единицы объема $(\rho_0\psi = \tilde{\psi})$:

$$\tilde{\psi} = -\frac{c\vartheta^2}{2T_0} + \frac{K}{2}\theta_T^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \mathcal{P}(t-\tau_1,\ t-\tau_2)\,d\,\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1)\,d\,\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_2), \tag{21.15}$$

где $\mathcal{P}(x,\ y) = \mathcal{P}(y,\ x)$ — некоторая неотрицательная функция — характеристика материала. Если ее приближенно можно заменить функцией одного аргумента

$$\mathscr{P}(t-\tau_1,\ t-\tau_2)=\mathscr{P}(2t-\tau_1-\tau_2), \tag{21.16}$$

то она легко определяется через R.

Полный дифференциал $\widetilde{\psi}$ по t равен

$$d\widetilde{\psi}=-\left(\frac{c\vartheta}{T_0}+3\alpha K\theta_T\right)d\vartheta+K\theta_T\,d\theta+d\widetilde{\varepsilon}_{ij}(t)\int\limits_0^t\mathscr{P}(t-\tau_1)\,d\widetilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1)+$$

$$+\,dt\int\limits_0^t\int\limits_0^t\mathscr{P}'(2t-\tau_1-\tau_2)\,d\widetilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1)\,d\widetilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_2). \tag{21.17}$$

Подставляя (21.12) в основное термодинамическое соотношение

$$d\widetilde{\psi}+\widetilde{s}\,d\vartheta=-p\,d\theta+\widetilde{\sigma}_{ij}\,d\widetilde{\varepsilon}_{ij}-w^*\,dt \tag{21.18}$$

и приравнивая в полученном выражении коэффициенты при $d\vartheta$, $d\theta$, $d\varepsilon_{ij}$, dt, находим совпадающие с (12.11) выражения

$$p=-K\theta_T,\ \widetilde{s}=\frac{c\vartheta}{T_0}-3\alpha p,$$

$$\widetilde{\sigma}_{ij}=\int\limits_0^t\mathscr{P}(t-\tau)\,d\varepsilon_{ij}(\tau), \tag{21.19}$$

$$w^*=-\int\limits_0^t\int\limits_0^t\mathscr{P}'(2t-\tau_1-\tau_2)\,d\widetilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1)\,d\widetilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_2).$$

Предполагается, что рассматриваемый материал, как уже указывалось, мгновенно упругий. Сравнивая $\widetilde{\sigma}_{ij}$ (21.19) и (21.14), находим функцию

$$\mathscr{P}(z)=R(z). \tag{21.20}$$

Представление $\mathscr{P}$ (x, y) в виде (21.16) термодинамически возможно, если $w^*\geqslant 0$ при $\mathscr{P}\equiv R$, т. е. если $R(t)$ удовлетворяет условию

$$w^*=-\int\limits_0^t\int\limits_0^t R'(2t-\tau_1-\tau_2)\,d\widetilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1)\,d\widetilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_2)\geqslant 0 \tag{21.21}$$

при любых $\widetilde{\varepsilon}_{ij}(t)$, $\widetilde{\varepsilon}_{ij}\,\delta_{ij}=0$. Для максвелловской модели, например, $R=R(0)\exp\left(-\dfrac{t}{t_r}\right)$, и потому

$$w^*=\frac{1}{2Gt_r}\left[\int\limits_0^t R(t-\tau_1)\,d\varepsilon_{ij}(\tau_1)\right]^2\geqslant 0.$$

Теплоемкость при $p=0$ равна $T_0 \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial T}=c$; второй закон термодинамики

$$T\frac{ds}{dt}=-\operatorname{div}\mathbf{q}+w^*$$

и закон Фурье $\mathbf{q}=-\lambda\operatorname{grad}T$ дают уравнение теплопроводности

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\Delta T+w^*+3\alpha T_0\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{21.22}$$

Присоединяя к нему уравнения движения $\rho(\ddot{u}_i-F_i)=\sigma_{ij,j}$, закон $p=-K\operatorname{div}\mathbf{u}$ и выражения (21.14), получаем замкнутую систему уравнений для $\mathbf{u}$ и T, причем задачи МСС в рассматриваемом случае будут *связными*, т. е. уравнения для $\mathbf{u}$ и T не разделяются, так как в (21.22) входит $\mathbf{u}$ через w^*; в выражения σ_{ij} через $p=-K(\operatorname{div}\mathbf{u}-3\alpha\vartheta)$ входит температура.

Другой способ представления функционала $\widetilde{\mathcal{F}}$ дает операторная формула

$$P\,\boldsymbol{э}=Q\,\boldsymbol{\sigma},\ P\widetilde{\varepsilon}_{ij}=Q\widetilde{\sigma}_{ij}, \tag{21.23}$$

где P, Q — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами вида

$$P=\sum_1^m a_k\frac{d^k}{dt^k},\quad Q=\sum_1^n b_k\frac{d^k}{dt^k}, \tag{21.24}$$

причем m, n — некоторые целые числа, a_k, b_k — постоянные. С этими операторами при дифференцировании и интегрировании по координатам можно обращаться как с числами; обозначая

$$2M=\frac{P}{Q}, \tag{21.25}$$

мы из (21.23) получаем «закон Гука»

$$\widetilde{\sigma}_{ij}=2M\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \tag{21.26}$$

и M играет роль упругой постоянной G.

Если для объемных деформаций принять закон Гука $-p=K\theta$, то из уравнений равновесия в *квазистатических* задачах

$$\sigma_{ij,j}+\rho F_i=0$$

получим уравнения Ляме, и потому задача сводится к задаче идеальной изотропной упругости. Если будет найден вектор перемещения $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x},\ M)$, то вычисление этой известной функции от оператора M можно сделать с помощью некоторых известных методов (Хевисайд). Поскольку (21.6) — общий вид линейной связи

$\tilde{\sigma}_{ij} \sim \tilde{\varepsilon}_{ij}$, следовательно, соотношения (21.23) можно преобразовать к виду (21.10).

§ 22. Влияние электромагнитного поля *

Во всех деформируемых и покоящихся средах в зависимости от их электромагнитных свойств наблюдаются более или менее сильные влияния электромагнитного поля на движение и макроскопическое состояние сред и обратное влияние движения сред на электромагнитные поля. Объекты, реализующие макровзаимодействие электромагнитного поля и среды — это электрические заряды среды и проходящие в ней токи, и потому взаимодействия существенно различны в средах — проводниках, полупроводниках и диэлектриках. На скрепленный со средой электрический заряд объемной плотности ρ_e' в электрическом поле напряженности $\mathbf{E}'$ в покое действует сила, которую он и передает единице объема среды: $\rho_e'\mathbf{E}'$; ток объемной плотности $\mathbf{j}'$, проходящий в той же точке среды при наличии магнитного поля с вектором магнитной индукции $\mathbf{B}'$, в этом случае (в покое) сообщает единице объема среды силу $\mathbf{j}'\times\mathbf{B}'/c$.

Если тот же единичный объем среды движется со скоростью $\mathbf{v}$ относительно некоторой системы координат наблюдателя (эйлерово пространство), то движение заряда представляет ток $\rho_e'\mathbf{v}$; векторы $\mathbf{j}''$, $\mathbf{E}''$, $\mathbf{B}''$, ..., определенные в этом пространстве, отличаются от $\mathbf{j}'$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$, ... в той же физической точке среды, т. е. по их природе векторы электромагнитного поля $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, ... при переходе от неподвижной к подвижной системе координат преобразуются по особым законам, отличным от преобразований векторов, ранее рассмотренных. Понятно, что все преобразования в системах координат (декартовых, криволинейных), неподвижных одна относительно другой, сохраняются для $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, ... такими же, как и для обычных векторов и тензоров. Эти особенности электромагнитных полей связаны с различием физических законов классической механики и теории относительности, определяемым параметром $\beta = v/c$ (отношение скорости движения к скорости света).

В классической механике, а следовательно и в МСС, все уравнения ковариантны (не изменяются) относительно преобразований Галилея: если вместо некоторого пространства наблюдателя с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$ выбрать другое ($\boldsymbol{x}'$), совпадающее с ним при $t = t_0$ и движущееся поступательно с постоянной скоростью $\mathbf{V}_0$, то для движущейся физической точки, определенной лагранжевой координатой $\mathbf{x}$ при $t = t_0$ и при $t > t_0$ одинаковой в обоих пространствах ($\mathbf{x}' \equiv \mathbf{x}$, так как $\mathbf{x}$, по существу, есть «номер» точки), закон движения будет иметь вид

* Автор благодарен В. В. Толмачеву за помощь при переработке этого параграфа.

$$t' = t, \ \boldsymbol{x}' \equiv \boldsymbol{x}'(\mathbf{x}, t') = \boldsymbol{x}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}_0 t. \qquad (22.1)$$

Здесь очевидна тождественность отрезков времени $dt' = dt$ и физических отрезков в обоих пространствах:

$$d\boldsymbol{x}' \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}'}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Уравнения электродинамики ковариантны относительно более общих преобразований Лоренца, при которых вместо сохранения времени и квадрата длины в трехмерном евклидовом пространстве

$$dt'^2 = dt^2, \quad d\mathbf{x}'^2 = d\mathbf{x}^2 \qquad (22.1')$$

сохраняется квадрат «длины» ds_4^2 в четырехмерном пространстве-времени Минковского:

$$ds_4^2 = c^2 dt'^2 - d\boldsymbol{x}'^2 = c^2 dt^2 - d\boldsymbol{x}^2, \qquad (22.2)$$

где c — скорость распространения электромагнитных волн ($\sim 3 \cdot 10^8$ м/с). Опыт показал, что (22.2) сводится к (22.1′) при $\beta = V_0/c \ll 1$.

Скорости, обычно рассматриваемые в МСС, малы сравнительно с c, даже если они порядка сотен километров в секунду, и поэтому классическая МСС практически не ограничивает условий задач. Но учет электромагнитных сил и мощностей в МСС требует правильного выражения векторов электромагнитного поля с последующими упрощениями.

Инерциальной декартовой подвижной системой координат (ДПС) в точке $\mathbf{x} = \text{const}$ (точка $\boldsymbol{x}$ пространства наблюдателя) в момент t_1 назовем декартову (или любую неподвижную в ДПС, например мгновенную лагранжеву), которая поступательно движется с местной скоростью $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t_1) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t_1)$ в течение малого интервала времени $t_1 - \Delta t \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t$; окрестность точки $\mathbf{x}$ в этот период с точностью до малых высшего порядка (и поворотов, которыми при использовании специальной теории относительности пренебрегают) остается «неподвижной» в ДПС. Местную систему координат, неподвижную в пространстве наблюдателя и совпадающую в момент $t = t_1$ с ДПС, назовем ДЭС (*декартова эйлерова система или любая местная криволинейная, неподвижная в пространстве наблюдателя*). Преобразование векторов электромагнитного поля от ДПС к ДЭС и называется преобразованием этих векторов от лагранжевой системы к системе пространства наблюдателя, от их значения в «покое» к значениям в системе наблюдателя.

Лагранжев репер $\boldsymbol{э}_i$ в точке $\mathbf{x}$ в момент $t = t_1$ одинаково ориентирован в ДПС и ДЭС, причем в течение малого интервала времени $t_1 \pm \Delta t$ приближенно неподвижен в ДПС. Следовательно,

производные по координатам $\mathscr{x}'$ ДПС в момент t_1 выражаются через производные по $\mathbf{x}$ (§ 5):

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^i} = A_i^j(\mathbf{x}, t_1)\frac{\partial}{\partial x'^j}, \quad \frac{\partial}{\partial x'^i} = B_i^j(\mathscr{x}, t_1)\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^j}. \tag{22.3}$$

Для любого скаляра $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и вектора $\mathbf{z}=z^i(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}_i$ градиент, дивергенция и ротор в ДПС-координатах $\mathscr{x}'$ в момент t_1 имеют выражения в лагранжевых координатах

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}'\varphi = B_i^j\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{x}^j}\mathbf{e}_i, \quad \operatorname{div}'\mathbf{z} = B_i^j\frac{\partial z^i}{\partial \mathrm{x}^j},\\ \operatorname{rot}'\mathbf{z} = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)}\mathbf{e}_\alpha\left(B_\beta^i\frac{\partial z^\gamma}{\partial \mathrm{x}^i} - B_j^i\frac{\partial z^\beta}{\partial \mathrm{x}^i}\right).\end{gathered} \tag{22.4}$$

Здесь (α, β, γ) — круговая перестановка $(1, 2, 3)$, z^i — декартовы компоненты $\mathbf{z}$ в ДПС. Предполагается, конечно, что φ и $\mathbf{z}$ определены в ДПС; это существенно при использовании специальной теории относительности.

Движение проводящих сред (металлов, ионизированных жидкостей и газов, полупроводников) при наличии электромагнитного поля сопровождается возникновением электрических токов, определяемых имеющимся полем и характером движения. Взаимодействие токов с магнитным полем, в свою очередь, приводит к изменению электромагнитного поля и к появлению дополнительных сил, изменяющих движение среды. В ряде случаев существенными оказываются также явления поляризации и намагничивания среды в электромагнитном поле. Поэтому возникает необходимость совместного рассмотрения механических и электромагнитных явлений.

Электромагнитное поле характеризуется *напряженностью* $\mathbf{E}$ *электрического* и *напряженностью* $\mathbf{H}$ *магнитного полей.* Электрическая *поляризация* и *намагниченность* среды характеризуются соответственно вектором $\mathbf{D}$ *электрической* и вектором $\mathbf{B}$ *магнитной индукции.*

Электромагнитное поле в пустоте или в электро- и магнитонейтральных средах описывается классическими уравнениями Максвелла

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0\end{gathered} \tag{22.5}$$

В общем случае проводящих, поляризуемых и намагничивающихся сред уравнения Максвелла во всех системах координат, ДПС, ДЭС, ... имеют одинаковый вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{22.6}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_e. \tag{22.7}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — объемная плотность возникающего в среде электрического тока, ρ_e — плотность электрических зарядов.

Отметим, что система уравнений Максвелла (22.6), (22.7) содержит лишь семь уравнений, так как уравнение $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ является следствием первого (векторного) уравнения (22.6) при соответствующих начальных данных. Для неподвижных проводящих сред система уравнений (22.6), (22.7) становится замкнутой, если известны функциональные зависимости векторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ электрической и магнитной индукции и тока $\mathbf{j}$ от напряженностей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ электрического и магнитного полей: при некоторых начальных и граничных условиях векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$ вполне определяются.

Из (22.7) следует закон сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{22.7'}$$

Вместо векторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ часто используются вектор *электрической поляризации* $\mathcal{P}$ (поляризации дипольных зарядов среды) и вектор *намагниченности* $\mathcal{M}$, тождественно определяемые равенствами

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathcal{P},\\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\mathcal{M}.\end{aligned} \tag{22.8}$$

Соотношения (22.5)—(22.8) ковариантны (сохраняют вид) относительно преобразований Лоренца, вытекающих из (22.2), если все величины ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{j}$, ρ_e) выражены в рассматриваемом пространстве (t, x). Задача определения $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ для области движения среды при некоторых условиях становится определенной, а уравнения (22.6), (22.7) — замкнутыми, если ρ_e задана и известны законы поляризации и намагничивания, а также возникновения тока, которые называются материальными соотношениями или выражениями электромагнитных свойств среды.

Проще всего материальные соотношения (как и уравнения состояния МСС) выражаются в лагранжевых координатах, т. е. в ДПС, особенно для начально изотропных также в отношении электромагнитных свойств сред (изотропных при $\mathbf{E}=0$, $\mathbf{H}=0$), которые в основном и будем рассматривать. Законы поляризации, намагничивания и закон Ома в ДПС или ДЭС имеют вид

$$4\pi \mathcal{P}' = (\varepsilon - 1)\,\mathbf{E}' \text{ или } \mathbf{D}' = \varepsilon\,\mathbf{E}', \tag{22.9}$$

$$4\pi \mathcal{M}' = (\mu - 1)\,\mathbf{H} \text{ или } \mathbf{B}' = \mu\,\mathbf{H}', \tag{22.10}$$

$$\mathbf{j}' = \sigma\,\mathbf{E}'. \tag{22.11}$$

Экспериментально определяемые для разных сред коэффициенты поляризации ($\varepsilon \geqslant 1$), магнитной проницаемости (μ может быть больше или меньше единицы) и проводимости (σ) могут существенно зависеть от плотности вещества (ρ) и температуры (T). Предположение о независимости коэффициентов от $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, т. е. линейности этих связей, лежит в основе классической электродинамики. Однако связь между $\mathcal{M}'$ и $\mathbf{H}'$ для ферромагнетиков имеет малую область линейности и напоминает кривую растяжения с разгрузками образца в упругопластической области (рис. 20.1). Для вакуума $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$.

Первое впечатление, что система уравнений (22.6)—(22.11), если всюду подставлены $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, ..., замкнута и не зависит от движения и деформации среды, неверно, так как ДПС в различных точках $\boldsymbol{x}$ имеют различные скорости движения и, следовательно, приближенно как твердое тело движется только малая окрестность точки $\boldsymbol{x}$ в момент t_1.

Векторы электромагнитного поля в местной мгновенной ДПС можно выразить через векторы в едином для всей среды пространстве наблюдателя, т. е. в ДЭС.

Отметим штрихом сверху все величины, определенные в ДПС, и во всех уравнениях (22.6)—(22.11) всем величинам (кроме ε, μ, σ) припишем штрихи. Эти соотношения отражают ковариантные соотношения электродинамики в пространстве-времени Минковского на трехмерное пространство и время в системе ДПС, которая со скоростью $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ движется относительно ДЭС. Без штрихов обозначим преобразованные к ДЭС величины. Тогда уравнения (22.5)—(22.8) сохраняют свой вид, так как они ковариантны относительно преобразований Лоренца. Материальные же соотношения изменяются согласно следующим преобразованиям векторов $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{j}'$ и ρ_e', приводимым без доказательства:

$$\beta \equiv \frac{v}{c}, \quad \gamma \equiv \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \boldsymbol{\xi} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \beta\boldsymbol{\xi} \equiv \frac{\mathbf{v}}{c}, \tag{22.12}$$

$$\gamma \rho_e = \rho_e' + \beta \frac{1}{c} \mathbf{j}'\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v} = \mathbf{j}' - (1 - \gamma)(\mathbf{j}'\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}, \tag{22.13}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma\mathbf{E} &= \mathbf{E}' - (1 - \gamma)(\mathbf{E}'\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} + \beta\mathbf{B}' \times \boldsymbol{\xi}, \\ \gamma\mathbf{H} &= \mathbf{H}' - (1 - \gamma)(\mathbf{H}'\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} - \beta\mathbf{D}' \times \boldsymbol{\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{22.14}$$

Преобразования для $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ получаются из (22.14) заменой $\mathbf{E} \to \mathbf{D}$, $\mathbf{H} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{D} \to \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \to \mathbf{H}$. Выражения $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, ... через $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, ... получа-

ются из (22.14) простым перенесением штрихов в левые стороны и изменением знака величины β. После подстановки $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, ..., $\mathbf{j}'$, ρ_e' в (22.9)—(22.11) получаем выражения материальных соотношений

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E} - \beta\xi \times (\mathbf{H} - \varepsilon\,\mathbf{B}),$$

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H} + \beta\xi \times (\mathbf{E} - \mu\,\mathbf{D}),\ \beta\xi = \frac{\mathbf{v}}{c}, \tag{22.15}$$

$$\mathbf{j} - \rho_e\,\mathbf{v} = \frac{\gamma\sigma}{1-\mu\varepsilon}(\mathbf{E} - \mu\,\mathbf{D}) = \frac{\sigma}{\gamma}[\mathbf{E} + \beta\xi \times \mathbf{B} - \beta^2(\mathbf{E}\xi)\,\xi]. \tag{22.16}$$

В пространстве наблюдателя эти соотношения и дополняются к уравнениям (22.6), (22.7); при заданной скорости движения различных точек среды $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ и параметрах ε, μ, σ внутри области определения система (22.6), (22.7), (22.15), (22.16) для векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ замкнута.

Отбрасывая в (22.13), (22.15), (22.16) малые порядка β^2 сравнительно с единицей, получаем с большой точностью материальные соотношения

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} - (1-\mu\varepsilon)\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H},$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + (1-\mu\varepsilon)\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}, \tag{22.17}$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho_e\mathbf{v} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mu\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}\right). \tag{22.18}$$

Здесь ρ_e', $\mathbf{j}'$ — плотность заряда и тока в ДПС, т. е. в точке $(\mathbf{x}, t)$ в системе, движущейся вместе с физической частицей среды. Как видим, в выражении закона Ома (22.18) при отсутствии собственных зарядов ($\rho_e'=0$) слагаемое $\rho_e\mathbf{v}$ в выражении тока $\mathbf{j}$ должно быть отброшено с ошибкой β^2 сравнительно с единицей.

Действие движущейся среды на электромагнитное поле сводится к влиянию не только скорости $\mathbf{v}$, но и температуры и деформаций (плотности ρ), от которых зависят ε и μ.

Действие электромагнитного поля на среду более сложно: на единицу объема среды со стороны поля действует объемная сила $\rho\mathbf{F}_э$ (пондеромоторная сила) и сообщается мощность $Q_э$, имеющие в пространстве наблюдателя выражения

$$\rho\mathbf{F}_э = \rho_e\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \mathbf{f}_{\mu\varepsilon}, \tag{22.19}$$

$$Q_э = \mathbf{j}\mathbf{E} + Q_{\mu\varepsilon},$$

где обозначены зависящие от μ, ε величины

$$8\pi \mathbf{f}_{\mu\varepsilon} = \mathbf{E}\frac{\delta \mathbf{D}}{\delta \boldsymbol{x}} - \mathbf{D}\frac{\delta \mathbf{E}}{\delta \boldsymbol{x}} + \mathbf{H}\frac{\delta \mathbf{B}}{\delta \boldsymbol{x}} - \mathbf{B}\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \boldsymbol{x}},$$

$$8\pi Q_{\mu\varepsilon} = \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (22.19')$$

и обозначен оператор $\delta/\delta\boldsymbol{x}$, который в декартовых координатах (репер $\mathbf{e}_i$) пространства наблюдателя определяет для любых векторов **A**, **C** вектор

$$\mathbf{A}\frac{\delta \mathbf{C}}{\delta \boldsymbol{x}} = \left(\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_i}\right)\mathbf{e}_i. \qquad (22.19'')$$

Разность между полной мощностью $Q_э$, сообщаемой полем единице объема среды, и мощностью пондеромоторной силы $\rho\mathbf{F}_э\mathbf{v}$, т. е.

$$\Delta Q_э = Q_э - \rho\mathbf{F}_э\mathbf{v}, \qquad (22.20)$$

при отбрасывании величины $\beta^2\mathbf{H}^2$ сравнительно с $\mathbf{E}^2$ равна

$$\Delta Q_э = \sigma\mathbf{E}\left(\mathbf{E} + 2\mu\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{H}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) - \frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}(\mathbf{ED} + \mathbf{BH}), \qquad (22.21)$$

где d/dt — полная производная в эйлеровом пространстве. Это выражение получается на основании (22.17)—(22.19) и тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} - v_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \left(\mathbf{A}\frac{\delta \mathbf{C}}{\delta \boldsymbol{x}}\right)\mathbf{v} = \mathbf{A}\left(\frac{d\mathbf{C}}{dt} - \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}\right).$$

Первое слагаемое правой части (22.21) в ДПС равно

$$\sigma\mathbf{E}'^2 = \frac{1}{\sigma}\mathbf{j}'^2$$

и, следовательно, представляет джоулево тепло, возникающее за счет электрического сопротивления $1/\sigma$; второе — совершаемую полем работу, причем последнее представляет полный дифференциал и может быть отнесено к приращению внутренней энергии единицы объема.

Необходимо отметить, что при преобразованиях Лоренца скорость **v** считается постоянной, преобразуются время, координаты и функции поля. Поэтому *при подстановке* (22.17) *в уравнения Максвелла, в вычислениях* (22.19), (22.21) *скорость* **v**, являющаяся функцией координат и времени, *не должна дифференцироваться по* $\boldsymbol{x}$, t. Это относится ко всем дифференциальным операторам над

электромагнитными скалярами и векторами, содержащими множители $\boldsymbol{\xi}$ или $\mathbf{v}$.

Уравнения Максвелла (22.6), (22.7) сохранят свой вид в ДПС, если в них внести значения (22.14), причем $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{v}/v$ не дифференцировать по $\boldsymbol{x}$, t:

$$\operatorname{rot}' \mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}, \quad \operatorname{div}' \mathbf{B}' = 0;$$

$$\operatorname{rot}' \mathbf{H}' = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}' + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'},\ \operatorname{div}' \mathbf{D}' = 4\pi\rho_e'. \tag{22.22}$$

Здесь rot′, div′ означают операторы по координатам $\boldsymbol{x}'$, которые в лагранжевых координатах имеют выражения (22.4). Определенную трудность вносит входящее в (22.22) местное время t', зависящее от $\mathbf{x}$, t. Строго говоря, некорректная замена $\partial/\partial t'$ на $\partial/\gamma\partial t$ совпадает с $t'=t$ с точностью до малых порядка β^2 (t — универсальное время МСС); полное преобразование Лоренца от ДПС к ДЭС возвращает постановку задачи к пространству наблюдателя со «странным» правилом — не дифференцировать β, $\boldsymbol{\xi}$ по $\boldsymbol{x}$, t. Эти трудности (отнюдь не в главной части) связаны с тем, что МСС представлена в классическом пространстве и времени, а связаны с особенностями специальной теории относительности.

Уравнения движения и сохранения массы сплошной среды в эйлеровом пространстве (10.16)

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v^i\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j}\,\mathbf{e}_i + \rho\mathbf{X}, \tag{22.23}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

или в лагранжевых координатах (10.11)

$$\rho_0\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^m}\left(AS^{mn}\,\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \mathrm{x}^n}\right) + \rho_0\mathbf{X}', \tag{22.24}$$

где объемные силы $\rho\mathbf{X}$ и $\rho_0\mathbf{X}'$

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{X} &= \rho\mathbf{X}_g + \rho\mathbf{F}_э, \\ \rho_0\mathbf{X}' &= \rho_0\mathbf{X}_g + A\rho\mathbf{F}_э'. \end{aligned} \tag{22.25}$$

Первые слагаемые — обычные заданные массовые силы (тяжести и др.), вторые же представляют пондеромоторные силы электромагнитного поля.

Например, вектор $\rho\mathbf{F}_э$ дан формулами (22.19), и компоненты его в декартовых координатах эйлерова пространства имеют выражения через **E**, **H**

$$\rho F_э^i \equiv \rho \mathbf{F}_э \mathbf{e}_i = \rho_e E^i + \frac{1}{c}(\mathbf{j}\times\mathbf{B})\,\mathbf{e}_i -$$

$$-\frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} - \mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^i} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^i} - \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i}\right). \qquad (22.26')$$

Поскольку предполагается, что **j**, **B**, **D** здесь заменены согласно (22.17), (22.18), причем

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} = \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^i} - (1-\mu\varepsilon)\frac{\mathbf{v}}{c}\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i} + \mathbf{E}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^i} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{H}\frac{\partial(\mu\varepsilon)}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^i} = \mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i} + (1-\mu\varepsilon)\frac{\mathbf{v}}{c}\times\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^i} + \mathbf{H}\frac{\partial \mu}{\partial x^i} - \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{E}\frac{\partial(\mu\varepsilon)}{\partial x^i}, \quad (22.26)$$

получается система уравнений (22.6), (22.7), (22.17), (22.18), (22.23), (22.25), (22.26). Эти уравнения представляли бы замкнутую систему в области движения, если бы напряжения σ^{ij} были выражены какими-нибудь операторами через вектор $\mathbf{v}(\boldsymbol{x}, t)$ и векторы **E**, **H** или **D**, **B**, т. е. если бы были известны уравнения состояния среды.

В лагранжевых координатах объемная сила согласно (22.9)—(22.11), (22.19) равна

$$\rho\mathbf{F}'_э = \rho'_e\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\mathbf{j}'\times\mathbf{B}' - \mathbf{f}'_{\mu\varepsilon} = \rho'_e\mathbf{E}' + \frac{\mu\sigma}{c}\mathbf{E}'\times\mathbf{H}' - \mathbf{f}'_{\mu\varepsilon}, \quad (22.26'')$$

где $\mathbf{f}'_{\mu\varepsilon}$ может быть взят в виде

$$8\pi\mathbf{f}'_{\mu\varepsilon} = \mathbf{E}'\frac{\delta\mathbf{D}'}{\partial x'} - \mathbf{D}'\frac{\delta\mathbf{E}'}{\delta x'} + \mathbf{H}'\frac{\delta\mathbf{B}'}{\delta x'} - \mathbf{B}'\frac{\delta\mathbf{H}'}{\delta x'}$$

или на основании (22.9), (22.10), (22.4) представлен через декартовы компоненты

$$8\pi\mathbf{f}'_{\mu\varepsilon} = (\mathbf{E}')^2\,\mathrm{grad}'\,\varepsilon + (\mathbf{H}')^2\,\mathrm{grad}'\,\mu = \left(\mathbf{E}'^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial \mathrm{x}^i} + \mathbf{H}'^2\frac{\partial\mu}{\partial \mathrm{x}^i}\right)B^i_j\mathbf{e}_j. \qquad (22.26''')$$

В (22.26″) $\rho_e'\mathbf{E}'$ — электрическая сила, действующая на заряды ρ_e'; второе слагаемое представляет лоренцеву силу, причем

$$\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}'\times\mathbf{H}'$$

называется вектором Умова — Пойнтинга; последнее слагаемое представляет силу, возникающую за счет неоднородности в среде коэффициентов ε, μ (включающую электро- и магнитострикционные силы). При очень малых перемещениях и деформациях ($\rho\approx\rho_0$, $A\approx 1, B^i_j\simeq\delta^i_j$) в лагранжевых координатах

$$\rho \mathbf{F}'_э \approx \rho'_e \mathbf{E}' + \frac{\mu\sigma}{c} \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' - \frac{1}{8\pi} (H'^2 \operatorname{grad} \mu + \mathbf{E}'^2 \operatorname{grad} \varepsilon). \quad (22.27)$$

Система уравнений (22.9)—(22.11), (22.22), (22.24), (22.25), (22.26) замкнута, если известны уравнения состояния, выражающие напряжения S^{ij} через $\varkappa$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Если поле температуры в среде неизвестно, то необходимо иметь еще уравнение теплопроводности, следовательно, ввести термодинамические функции.

Вопрос об уравнениях состояния и выражении законов термодинамики необратимых процессов при наличии электромагнитного поля в МСС не имеет однозначного решения. В ряде случаев предполагают, что связь между напряжениями, деформациями, скоростями, температурой или энтропией при наличии электромагнитного поля сохраняется такой же, как и в отсутствии поля, и тем замыкают систему уравнений. В ряде случаев используют при некоторых предположениях представление силы $\rho\mathbf{F}_э$ в дивергентном виде

$$\rho \mathbf{F}_э = \operatorname{div} \widetilde{S}_{\mathscr{M}}, \quad (22.28')$$

где $\widetilde{S}_{\mathscr{M}}$ — тензор электромагнитного натяжения, так что динамическое уравнение приобретает вид

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{F}_g \right) = \operatorname{div} (\widetilde{S} + \widetilde{S}_{\mathscr{M}}), \quad (22.28)$$

и после этого полагают, что тензор $\widetilde{S}+\widetilde{S}_{\mathscr{M}}$ таков же, как в отсутствии электромагнитного поля. Эти предположения иногда приводят к удовлетворительному согласию с опытом.

Можно сделать следующие предположения:

1) вклад в макромеханическое состояние электромагнитного поля вносится мощностью $\Delta Q_э$ (22.21), которую представим суммой

$$\Delta Q'_э dt = \rho q'_э dt + \delta' A_э - du'_э, \quad \rho q'_э = \sigma \mathbf{E}'^2,$$

$$\delta' A_э = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}' d\mathbf{D}' + \mathbf{H}' d\mathbf{B}'), \; u'_э = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D}'^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}'^2 \right); \quad (22.29)$$

2) по отношению к частице единичного объема, неподвижной в ДПС, назовем $\rho q'_э$ электрическим источником тепла, $\delta' A_э$ — работой сил поля, $u_э$ — составной частью внутренней энергии единицы объема;

3) полный источник тепла (мощность) в единице объема равно $\rho q'_э + w^*$ (§ 11);

4) полная работа внешних сил равна $\delta' A_э + \delta' A$ (§ 11);

5) приращение внутренней энергии единицы объема ρdu за dt и приращение энтропии ρds удовлетворяют соотношениям (11.38)

$$\rho du = \delta' A + \delta' A_э + \rho q'_э dt + \delta' Q_T,$$

$$\rho T ds = \delta' Q_T + (w^* + \rho q'_э) dt, \tag{22.30}$$

причем

$$\delta' Q_T = \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T dt \tag{22.31}$$

приток тепла за счет теплопроводности;

6) внутренняя энергия u и энтропия s — функции (функционалы) инвариантов тензора деформации $\widetilde{\mathscr{E}}$, температуры T и векторов индукции $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$. Соотношения (22.30), (22.31) эквивалентны термодинамическому соотношению

$$\rho (d\psi + s dT) = S^{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}' d\mathbf{D}' + \mathbf{H}' d\mathbf{B}') - (w^* + \rho q'_э) dt,$$

$$\psi = u - sT, \tag{22.32}$$

и уравнению притока тепла в лагранжевых и эйлеровых координатах

$$\rho_0 T \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\lambda A g^{mn} \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) + A (w^* + \rho q'_э),$$

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + w^* + \rho q'_э. \tag{22.33}$$

Уравнение (22.33) становится уравнением теплопроводности, если энтропия известна как функция температуры T и функций поля $\widetilde{\mathscr{E}}$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{H}'$.

Соотношение (22.32) может служить для определения уравнений состояния, если ψ — заданная функция (функционал) переменных $\widetilde{\mathscr{E}}$ (тензор деформации), T, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$. Механическое рассеяние w^* и уравнения состояния во многих случаях находятся методами § 11, если известен функционал ψ; обобщение формул (13.36′), (11.32′) на случай зависимости ψ от $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ элементарно.

Если же u, s — *функции* $\widetilde{\mathscr{E}}$, T, β, где β в данном случае означает совокупность ($\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$) и w^* представляет сумму (§ 15, 18, 21)

$$w^* dt = W^{ij} d\varepsilon_{ij} + w_0^* dt \geqslant 0 \tag{22.34}$$

(в вязких жидкостях, например, $W^{ij} = \mu_{жид} V^{ij}$), а $\rho q'_э$ — сумму

$$\rho q'_э dt = \mathbf{W}'_D d\mathbf{D}' + \mathbf{W}'_B d\mathbf{B}' + w^*_{э0} dt, \tag{22.35}$$

то из (22.32) уравнения состояния получают с помощью дополнительных предположений. Предположение о *квазиобратимости* (наряду с необратимыми возможны обратимые процессы и т. п.) означает, по существу, что в уравнении (22.32) отбрасывается

отличный от нуля источник энергии $\overset{*}{w}_0$, и после этого все дифференциалы: dT, $d\varepsilon_{ij}$, $d\mathbf{D}'$, $d\mathbf{B}'$ — считаются независимыми. Тогда уравнения состояния принимают вид

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}, \quad S^{ij} = W^{ij} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}},$$
$$\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}' = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{D}'}, \quad \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}' = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}'}. \tag{22.36}$$

В действительности распространено предположение, что свободная энергия ψ — это сумма чисто термомеханической и электромагнитной энергии $u_э'$ (22.29), причем слагаемые W_D', W_B' не учитываются:

$$\rho d\psi = \rho d\psi_{мех} + \frac{1}{8\pi}d(\varepsilon^{-1}\mathbf{D}'^2 + \mu^{-1}\mathbf{B}'^2), \tag{22.37}$$

где $\psi_{мех}$ — свободная (термомеханическая) энергия при отсутствии электромагнитного поля. Считая ε, μ зависящими от T и $\widetilde{\mathscr{E}}$, получим

$$s = -\frac{\partial\psi_{мех}}{\partial T} - \frac{1}{8\pi\rho}\left(\frac{\partial\varepsilon^{-1}}{\partial T}\mathbf{D}'\mathbf{D}' + \frac{\partial\mu^{-1}}{\partial T}\mathbf{B}'\mathbf{B}'\right),$$
$$\mathbf{E}' = \varepsilon^{-1}\mathbf{D}', \quad \mathbf{H}' = \mu^{-1}\mathbf{B}', \tag{22.38}$$
$$S^{ij} = \rho\frac{\partial\psi_{мех}}{\partial\varepsilon_{ij}} + W^{ij} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon^{-1}}{\partial\varepsilon_{ij}}\mathbf{D}'\mathbf{D}' + \frac{\partial\mu^{-1}}{\partial\varepsilon_{ij}}\mathbf{B}'\mathbf{B}'\right).$$

Если ε, μ — скаляры, то в (22.38) $\mathbf{D}'\mathbf{D}' = \mathbf{D}'^2$, $\mathbf{B}'\mathbf{B}' = \mathbf{B}'^2$; если же (в анизотропном случае) $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ — тензоры второго ранга, то в (22.38) векторы

$$\frac{\partial\hat{\varepsilon}^{-1}}{\partial T}\mathbf{D}', \quad \frac{\partial\hat{\mu}^{-1}}{\partial T}\mathbf{B}'$$

скалярно умножаются на векторы $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$. *Квадратичные относительно* $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$ слагаемые в (22.38) отражают *малые*, так называемые *стрикционные*, *эффекты*, могущие быть существенными при больших градиентах ε, μ. Уравнение теплопроводности, замыкающее систему уравнений движения, Максвелла, (22.38), получается из (22.33) подстановкой выражения s (22.38), а в первом приближении — просто заменой в (22.33) $s \approx -\partial\psi_{мех}/\partial T$, $\rho q_э' = \sigma\mathbf{E}'^2$.

Преобразования к эйлеровым координатам термомеханических слагаемых в (22.38) обычны в МСС, а содержащих $\mathbf{D}'$, $\mathbf{E}'$ выполнимы на основании (22.14) при $\gamma = 1$.

В диэлектриках, обладающих *пьезоэлектрическими* свойствами (анизотропных кристаллах, пьезокерамиках) наблюдаются *линей-*

ные связи между $\widetilde{S}$, $\widetilde{\mathscr{E}}$, $\mathbf{E}$, не содержащиеся в (22.38). Даже в рамках гипотезы квазиобратимости это дефект гипотезы (22.37). Отбрасывая магнитные эффекты и считая, что заряды сводятся только к диполям (следовательно, $\rho_e'=0$), уравнения для $\mathbf{E}'$ из (22.22) берутся при $\mathbf{D}'=\widehat{\varepsilon}\mathbf{E}'$ в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{D}'=0;$$

$$\mathbf{E}'=\operatorname{grad}\varphi,\quad \operatorname{div}(\widehat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi)=0, \tag{22.39}$$

т. е. берутся уравнения электростатики из теории электричества.

При малых деформациях ($\rho=\rho_0$) и изотермических процессах, обозначая

$$\rho_0\psi-\frac{1}{8\pi}\widehat{\varepsilon}\mathbf{E}'\mathbf{E}'=\widetilde{\psi}(\widetilde{\mathscr{E}},\mathbf{E}), \tag{22.40'}$$

в предположении квазиобратимости из (22.32) получим (при $q\rho_э' \approx 0$)

$$d\widetilde{\psi}=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}'d\mathbf{E}'. \tag{22.40}$$

Ограничиваясь квадратичной формой в разложении $\widetilde{\psi}(\widetilde{\mathscr{E}},\widetilde{E})$, учитывая для анизотропных тел выражение (16.18) для чисто механических эффектов, заключаем, что ковариантность разложения $\widetilde{\psi}$ требует существования еще двух групп констант вещества: двухиндексных — для сверток компонент вектора $\mathbf{E}$ и трехиндексных — для сверток компонент ε_{ij} и E_k. В результате

$$2\widetilde{\psi}=E_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}-\frac{1}{4\pi}E^{э}_{ij}E_i'E_j'-\frac{1}{2\pi}E_{ij.k}\varepsilon_{ij}E_k'. \tag{22.41}$$

При этом упругие модули обладают известной симметрией (§ 16), и второе слагаемое (22.41) представляет положительно определенную квадратичную форму с матрицей диэлектрической проницаемости $(E^{э}_{ij})$.

Подставляя (22.41) в (22.40), находим уравнения связи $\widetilde{S}$ с $\widetilde{\mathscr{E}}$ и $\mathbf{E}$, отражающие пьезоэлектромеханический эффект:

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\varepsilon_{ij}},\quad D_k'=-4\pi\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial E_k'},$$

или развернуто

$$\sigma_{ij}=E_{ijmn}\varepsilon_{mn}-E_{ij.k}E_k',$$

$$D_k'=E^{э}_{kj}E_i'+E_{ij.k}\varepsilon_{ij}. \tag{22.42}$$

Следовательно, $\widehat{\varepsilon}=(E_{kj})$ — матрица диэлектрической проницаемости; $(E_{ij.k})$ представляет пьезоэлектрические модули.

Для малых деформаций, перемещений и скоростей движения диэлектриков системы уравнений механики

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{22.43}$$

электростатики (22.39) вместе с уравнениями состояния (22.42) представляют замкнутую систему четырех уравнений для вектора $\mathbf{u}(u_i,\ i=1,\ 2,\ 3)$ и электрического потенциала φ. Ввиду отсутствия зарядов и слабости токов ($\sigma \approx 0$) в (22.43) отброшены пондеромоторные силы. Оценку возникающего магнитного поля $\mathbf{H}$ за счет слабой нестационарности $\mathbf{E}'$ и скорости движения $\partial \mathbf{u}/\partial t$ можно получить из неиспользованных уравнений (22.22) при уже найденных $\mathbf{E}'$, $\mathbf{D}'$:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}' = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}' = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t}.$$

После этого можно дать оценку отброшенной в (22.43) пондеромоторной силы, которая должна быть вычислена в пространстве наблюдателя.

Другие электромагнитные эффекты получаются при иных представлениях свободной энергии ψ в зависимости от $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и закона Ома для металлов и полупроводников различной структуры, например представления ее в виде, подобном (22.41) при замене $\mathbf{E}$ на $\mathbf{H}$ и т. д. Закон Ома для изотропных металлов и ряда монокристаллов, например, при переменном температурном поле имеет более точный вид

$$\mathbf{j} = \widehat{\sigma}(\mathbf{E} + \widehat{\alpha}_T \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = -\widehat{\Lambda} \operatorname{grad} T,$$

где $\widehat{\sigma}$, $\widehat{\alpha}_T$ — скалярные константы или матрицы проводимости и термоэлектрических эффектов.

До сих пор не рассматривались электромагнитные граничные условия на границе двух различных сред; механические граничные условия кинематического типа не зависят от электромагнитного поля, динамические же иногда требуют в МСС поправок, связанных с тензором натяжения Максвелла $\widetilde{S}_{\mathcal{M}}$, который отличен от нуля даже в пустоте, что и говорит о малости этих поправок. Электромагнитные граничные условия должны быть согласованы с уравнениями Максвелла и опытом. Например, во всех средах $\operatorname{div} \mathbf{B}' = 0$; выделяя около границы Σ двух сред тонкий, охватывающий обе среды слой толщины $\delta \to 0$ и вычисляя интеграл

$$0 = \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{B}' dV = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{B}'\mathbf{n}\, d\Sigma \to \int\limits_{\Sigma} (\mathbf{B}_2'\mathbf{n} - \mathbf{B}_1'\mathbf{n})\, d\Sigma,$$

находим условия на Σ с нормалью $\mathbf{n}$

$$\Delta(\mathbf{B}'\mathbf{n}) \equiv \mathbf{B}_2'\mathbf{n} - \mathbf{B}_1'\mathbf{n} = 0, \qquad (22.44)$$

т. е. нормальная составляющая вектора магнитной индукции на Σ непрерывна. Аналогично из (22.7), (22.7′) при конечных ρ_e, $\partial\rho_e/dt$ следуют два эквивалентных друг другу условия

$$\Delta(\mathbf{D}'\mathbf{n}) = 0, \quad \Delta(\mathbf{j}'\mathbf{n}) = 0, \qquad (22.45)$$

причем для диэлектриков берется первое, для проводников — второе, а для их комбинации — любое из (22.45). Применяя формулу Стокса (7.47) к интегралу по части того же объема, опирающейся на малый элемент $\Delta\Sigma$ площади поверхности Σ, ограниченной малым контуром Δl, от $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E}$, на основании уравнений Максвелла получим при некоторых несущественных ограничениях на $\partial\mathbf{B}/\partial t$, $\partial\mathbf{D}/\partial t$, $\mathbf{j}$ условия непрерывности тангенциальных составляющих $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$:

$$\Delta(\mathbf{H}'\boldsymbol{\tau}) = 0, \quad \Delta(\mathbf{E}'\boldsymbol{\tau}) = 0, \qquad (22.46)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — любой тангенциальный вектор на $\Sigma\,(\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}=0)$. Как видим, за счет скачка нормальной составляющей векторов $\mathbf{H}'$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{j}$, вытекающего из (22.44), (22.45) и материальных уравнений (22.15), (22.16) или (22.9), (22.10), в ДПС

$$\Delta(\mathbf{E}'\mathbf{n}) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right)\mathbf{E}_1'\mathbf{n},$$

$$\Delta(\mathbf{H}'\mathbf{n}) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)\mathbf{H}_1'\mathbf{n}, \quad \Delta(\mathbf{j}'\mathbf{n}) = \left(\frac{\sigma_2\varepsilon_1}{\sigma_1\varepsilon_2} - 1\right)\mathbf{j}'\mathbf{n}, \qquad (22.47)$$

на границах сред могут возникать большие термомеханические и электромагнитные эффекты, например большие пондеромоторные силы и мощности и другие физические краевые эффекты.

Применительно к уравнениям (22.39), (22.42), (22.43) пьезоэлектрических эффектов, используемых для получения токов с помощью пьезокерамик или других пьезоактивных тел, к обычным механическим граничным (и начальным) условиям для решения эллиптического уравнения второго порядка (типа уравнения Лапласа) на границе тела необходимо задание φ или производной от φ по какому-нибудь направлению. Если, например, на разделенных между собой частях поверхности Σ находятся проводники с потенциалами $V_1^э = V(t)$ на Σ_1 и $V_2^э = -V(t)$ на Σ_2 и остальная часть окружена вакуумом (или воздухом), то вследствие большой диэлектрической проницаемости тела

$$\|\hat{\varepsilon}\|_{\text{тело}} \gg \|\hat{\varepsilon}\|_{\text{возд}}$$

граничные условия (22.45), (22.46) принимают вид

$$\varphi = \pm V(t) \text{ на } \Sigma_1, \; \Sigma_2, \qquad \mathbf{D}'\mathbf{n} = D'_i n_i = 0 \text{ вне } \Sigma_1, \; \Sigma_2. \tag{22.48}$$

Следовательно, при свободной от механической нагрузки поверхности тела Σ потенциал $\pm V(t)$ вызывает деформации, а при переменной разности $V(t) = V_0 \sin \omega t$ — колебания тела, особенно сильные в резонансных режимах. И наоборот, если слабыми механическими периодическими воздействиями на Σ возбуждать резонансные колебания тела, то на обкладках Σ_1, Σ_2 возникает значительная разность потенциалов $\pm V_0 \sin \omega t$, т. е. в замыкающем Σ_1, Σ_2 проводе возникнет ток. Такой преобразователь энергии используется в пьезоэлектрической технике, например, в пьезоэлектрических приборах.

Сильные термомеханические и электромагнитные эффекты возникают в телах-проводниках за счет периодических и импульсных магнитных полей и джоулева тепла. Они описываются приведенными выше уравнениями и граничными условиями и требуют рассмотрения электромагнитных уравнений в теле и окружающей среде.

В *магнитной гидродинамике* принимают, что термодинамические функции и напряжения S^{ij} не зависят от векторов **D**, **B**, считают обычно явления поляризации и намагничивания отсутствующими, т. е. предполагают $\mu = \varepsilon = 1$, и пренебрегают током смещения. Уравнения Максвелла (22.6), (22.7) принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_e, \tag{22.49}$$

а пондеромоторная сила $\rho\mathbf{F}_э$ (22.19)

$$\rho\mathbf{F}_э = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{H} \tag{22.50}$$

называется силой Лоренца.

В случае баротропной жидкости, для которой уравнение состояния имеет вид $P = P(\rho)$, уравнения движения и сохранения массы

$$\frac{d\mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} P(\rho) = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_э, \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad \left(P(\rho) = \int \frac{dp}{\rho}\right) \tag{22.51}$$

совместно с (22.50), уравнениями Максвелла (22.49) и законом Ома (22.18) дают замкнутую систему пятнадцати уравнений относительно тринадцати функций $\mathbf{v}$, ρ, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$.

При решении практических задач магнитной гидродинамики используют различные упрощенные системы уравнений. Ввиду малости распределенных зарядов полагают $\rho_e=0$. В ряде случаев, например для сильно ионизированных газов, можно считать также, что среда имеет бесконечную проводимость σ. При этом упрощения уравнений оказываются весьма существенными. Для бесконечно проводящей среды из закона Ома (22.18) в силу конечности плотности тока $\mathbf{j}$ получим $\rho_e=0$, $\sigma=\infty$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}], \tag{22.52}$$

а из первого уравнения (22.7), пренебрегая током смещения,

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{H}. \tag{22.53}$$

Уравнения Максвелла (22.5) и выражение силы (22.50) принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}],\ \operatorname{div}\mathbf{H}=0,\\ \rho\mathbf{F}_э = \frac{1}{4}\pi\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H}.\end{gathered} \tag{22.54}$$

Отметим также, что для бесконечно проводящей среды джоулево тепло равно нулю.

В полученную таким образом замкнутую систему (22.51), (22.54) входит лишь одна векторная электромагнитная функция— напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$, $\mathbf{v}$ и ρ.

Глава VI
МЕТОДЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ

§ 23. Основы теории размерностей и подобия

Все уравнения МСС и граничные условия суть уравнения, связывающие между собой различные *размерные величины* Q_i; среди них — геометрические и механические: координаты и перемещения $\mathscr{x}$, $\mathbf{u}=\mathscr{x}-\mathbf{x}$, время t, скорость $\mathbf{v}$, ускорение $\mathbf{w}$, векторы базиса $\mathbf{э}_i$, массовая $\mathbf{F}$ и поверхностная $\mathbf{P}^{(n)}$ силы, напряжения физические σ_{ij}, компоненты тензора напряжений S_{ij}, деформации ε_{ij}, скорости деформаций v_{ij}, работа A, мощность R, кинетическая энергия K, различные механические константы среды — модуль упругости E, коэффициент вязкости μ и ряд других; термодинамические: температура T, количество тепла Q, тепловой поток $\mathbf{q}$, внутренняя и свободная энергия u, ψ, энтропия s, рассеяние w^*, коэффициенты теплоемкости c, теплопроводности λ, расширения α и т. д. и величины β электромагнитной ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, ε ...) и другой природы.

Система единиц CGS необходима и достаточна для построения МСС (и всей физики) и содержит три независимых параметра: длину l (сантиметр), массу m (грамм), время τ (секунда).

Размерности

$$|l| = C,\ [m] = G,\ [\tau] = S \tag{23.1}$$

можно рассматривать как действительные числа, для которых *определена* коммутативная операция умножения и возведения в степень, т. е. определена группа величин Q_i ($i=0, 1, 2, \ldots$) при $Q_0=1$, размерность которых $[Q_i]$ равна

$$[Q_i] = C^{\lambda_i} G^{\mu_i} S^{\nu_i}, \tag{23.2}$$

причем λ_i, μ_i, ν_i — числа, называемые *показателями размерности* Q_i. Любая величина Q_c называется *безразмерной*, если $\lambda_c=\mu_c=\nu_c=0$, т. е. $[Q_c]=1$. Для группы Q_i определена размерность произведения

$$[Q_i Q_j] = [Q_i]\,[Q_j] = C^{\lambda_i+\lambda_j} G^{\mu_i+\mu_j} S^{\nu_i+\nu_j}. \tag{23.3}$$

В соответствии со свойствами всех уравнений МСС (вообще физики) *операция сложения двух величин, отличных от нуля, опре-*

делена только для величин с одинаковыми показателями размерности, т. е. для однородных величин; из равенства

$$Q_i + Q_j = 0 \qquad (23.4)$$

следует

$$[Q_i] = [Q_j],\ \lambda_i = \lambda_j;\ \mu_i = \mu_j;\ \nu_i = \nu_j. \qquad (23.5)$$

Примеры размерных величин: координата $\mathbf{x}$, перемещение $\mathbf{u}$, длина l имеют размерность C:

$$[\mathbf{x}] = [\mathbf{u}] = [l] = C \ (\lambda = 1,\ \mu = \nu = 0);$$

вектор скорости $\mathbf{v}$, его компоненты в декартовой ортогональной системе координат $v_i = v^i$, скорость звука в воздухе c_0 имеют размерность

$$[\mathbf{v}] = [v_i] = [c_0] = CS^{-1} \ (\lambda = 1,\ \mu = 0,\ \nu = -1);$$

физическое напряжение σ_{ij}, энергия единицы объема W_1:

$$[\sigma_{ij}] = [W_1] = C^{-1}GS^{-2} \ (\lambda = -1,\ \mu = 1,\ \nu = -2);$$

массовая сила $\mathbf{F}$, ускорение $\mathbf{w}$, ускорение силы тяжести $\mathbf{g}$:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{w}] = [\mathbf{g}] = CS^{-2} \ (\lambda = 1,\ \mu = 0,\ \nu = -2);$$

объемная сила $\rho\mathbf{F}$, удельный вес γ:

$$[\rho\mathbf{F}] = [\gamma] = C^{-2}GS^{-2} \ (\lambda = -2,\ \mu = 1,\ \nu = -2);$$

кинетическая энергия K, потенциальная энергия U, количество тепла δQ тела:

$$[K] = [U] = [\delta Q] = C^2GS^{-2} \ (\lambda = 2,\ \mu = 1,\ \nu = -2);$$

средняя «кинетическая» температура $T_{\text{кин}} = \frac{3}{2} kT$ (T — в градусах Кельвина):

$$[T_{\text{кин}}] = [K] = C^2GS^{-2} \ (\lambda = 2,\ \mu = 1,\ \nu = -3).$$

Примеры соотношений: кинематическое соотношение между $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, t

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt},\ [\mathbf{v}] = \left[\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right] = CS^{-1};$$

уравнения движения в декартовых координатах $\mathbf{x}$:

$$-\rho\frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = 0,$$

$$\left[\rho\frac{dv_i}{dt}\right]=\left[\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\right]=[\rho F_i]=C^{-2}\,GS^{-2};$$

связь между внутренней энергией ρu, свободной энергией $\rho\psi$, энтропией ρs и температурой T в единице объема в системе CGS для кинетических температур и энтропии

$$T_{\text{кип}}=\frac{3}{2}kT,\ s_{\text{кин}}=\frac{2}{3k}s$$

имеет вид

$$\rho(u-\psi-sT)=\rho(u-\psi-s_kT_k)=0,$$

и потому

$$[\rho u]=[\rho\psi]=[\rho s_k]\,[T_k]=[\rho\, sT]=C^{-1}GS^{-2}=[\sigma_{ij}],$$

$$[\rho]=C^{-3}G,\ [u]=[\psi]=[s_k]\,[T_k]=C^2S^{-2},$$

и так как $[T_k]=C^2GS^{-2}$, то $[s_k]=C^2S^{-3}\,[T_k]^{-1}=G^{-1}$, т. е. энтропия s_k в CGS имеет размерность единицы, деленной на массу.

Преобразование масштаба единиц. Кроме базиса (системы единиц измерения) CGS с независимыми параметрами l, m, τ применяется *базис MKS* (как и в системе СИ) с параметрами l_m (метр), m_k (килограмм-масса), τ_s (секунда), который отличается от CGS только *масштабом* основных параметров:

$$l_m=10^{-2}\,l,\ m_k=10^{-3}\,m,\ \tau_s=\tau. \tag{23.6}$$

Это значит, что времена совпадают, некоторая величина, имеющая l единиц длины системы CGS, будет иметь $l_m=0{,}01\,l$ единиц длины системы MKS, масса, имеющая m единиц в CGS, будет иметь $m_k=0{,}001\,m$ единиц в MKS. Единица длины одного и того же отрезка ab в CGS равна $1/l$, в MKS — $1/l_m$ и, следовательно,

$$1/l_m=10^2\,1/l,\quad 1/m_k=10^3\,1/m,\ 1/\tau_s=1/\tau.$$

Единица силы в системе MKS — 1 Н (ньютон) $=10^5$ дин.

Системы единиц, например ABD с тремя основными параметрами l_A, m_B, τ_D, получающимися из CGS преобразованием масштаба основных параметров

$$l_A=\alpha_1 l,\ m_B=\alpha_2 m,\ \tau_D=\alpha_3\tau, \tag{23.7}$$

где α_1, α_2, α_3 — числа, *образуют группу с преобразованием* подобия, в которой сохраняются все определения и свойства системы CGS (23.1)—(23.5), если обозначить

$$[l_A]=A,\ [m_B]=B,\ [\tau_D]=D. \tag{23.8}$$

Пусть данная размерная величина выражена через основные параметры CGS и ABD (k_1, k_2 — безразмерные величины):

$$Q_1 \equiv Q_{CGS} = k_1 l^{\lambda_1} m^{\mu_1} \tau^{\nu_1}, \; [Q_1] = C^{\lambda_1} G^{\mu_1} S^{\nu_1},$$
$$Q_2 \equiv Q_{ABD} = k_2 l_A^{\lambda_2} m_B^{\mu_2} \tau_D^{\nu_2}, \; [Q_2] = A^{\lambda_2} B^{\mu_2} D^{\nu_2}. \tag{23.9}$$

Внося сюда значения (23.7), получим выражение Q_2 в системе CGS:

$$(Q_2)_{CGS} = Q_1 = k l^{\lambda_2} m^{\mu_2} \tau^{\nu_2} = k_1 l^{\lambda_1} m^{\mu_1} \tau^{\nu_1},$$
$$k = k_2 \alpha_1^{\lambda_2} \alpha_2^{\mu_2} \alpha_3^{\nu_2},$$

где k — безразмерный параметр. Так как l, m, τ независимы, то

$$\lambda_2 = \lambda_1, \; \mu_2 = \mu_1, \; \nu_2 = \nu_1, \; k = k_1, \tag{23.10}$$
$$k_2 = k_1 \alpha_1^{-\lambda_1} \alpha_2^{-\mu_1} \alpha_3^{-\nu_1}.$$

Следовательно, в *группе базисов с преобразованием подобия показатели размерности любой величины сохраняются.*

Преобразование структуры единиц трехпараметрического базиса. Преобразования подобия изменяют масштаб единиц, но не их структуру: длины остаются длинами, массы — массами, времена — временами, а следовательно, сохраняется физический смысл всех величин Q (23.9). Очевидно, что для представления размерностей физических величин Q вместо базиса CGS (или другого из группы с преобразованием подобия) можно взять любой трехпараметрический базис $B_1B_2B_3$ с основными параметрами, получающийся из CGS *преобразованием структуры*:

$$B_i = [b_i] = C^{s_{i1}} G^{s_{i2}} S^{s_{i3}},$$
$$b_i = b_i^0 \, l^{s_{i1}} m^{s_{i2}} \tau^{s_{i3}}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{23.11}$$

где $b_i^0 \neq 0$ — безразмерные, s_{ij} — безразмерные числа, удовлетворяющие условию взаимной однозначности базисов $B_1B_2B_3$ и CGS. Логарифмируя (23.11), получим три уравнения для $\ln l$, $\ln m$, $\ln \tau$:

$$s_{i1} \ln l + s_{i2} \ln m + s_{i3} \ln \tau = \ln \frac{b_i}{b_i^0} \quad (i = 1, 2, 3); \tag{23.12}$$

поскольку b_i — независимые размерные единицы базиса B_1, B_2, B_3, то $b_i \neq b_i^0$, и потому базисы взаимно-однозначны при условии

$$\operatorname{Det}(s_{ij}) = |s_{ij}| \neq 0. \tag{23.13}$$

Базис $B_1B_2B_3$ фиксированной структуры имеет группу преобразований подобия (масштаба единиц)

$$b_i' = \alpha_i b_i, \ \langle i = 1, 2, 3 \rangle,$$

при которых показатели структуры s_{ij} неизменны.

Базис CDS (сантиметр, дина, секунда) получается из CGS заменой параметров l, m, τ на $b_1 = l$, $b_2 = F$, $b_3 = \tau$, причем

$$b_1^0 = b_2^0 = b_3^0 = s_{11} = s_{22} = s_{33} = 1;$$

$$s_{12} = s_{13} = s_{31} = s_{32} = 0; \ s_{21} = 1; \ s_{23} = -2;$$

$$s_{21} = 1; \ s_{23} = -2; \ F = lm\tau^{-2} \text{ дин}.$$

В МСС и в технике применяются различные $B_1B_2B_3$, например, мы воспользуемся базисом $CK_{\text{г}}S$ (сантиметр, килограмм-сила, секунда) с основными параметрами l, P, τ, получающимися из CDS преобразованием подобия $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 1{,}02 \cdot 10^{-6}$, $P \approx \approx 1{,}02 \cdot 10^{-6} F = 0{,}102 N$; точнее $\alpha_2 = 10^{-5}/g$, $g = 9{,}81 \ldots$ м/с^2.

Базис CGS с тремя независимыми размерными параметрами l, m, τ необходим и достаточен для всей теории МСС, но не во всех задачах является необходимым. В теории деформаций необходим и достаточен только C с длиной l, в кинематике — CS с l и τ, в статике сред со склерономными свойствами — $CK_{\text{г}}$ и т. д.

Но уже в *геометрии* (теории деформаций) вместо одного необходимого и достаточного C с длиной l в сантиметрах *бывает удобно ввести еще один* (или несколько) *независимый* параметр— длину L с наименованием размерности D_0, т. е. ввести базис независимых величин CD_0 с параметрами l, L, где L, например, километры. Но при этом для построения геометрии тел, в которых малые размеры измеряются в C, а большие — в независимых D_0, необходимо ввести еще один *размерный* параметр — константу структуры λ с размерностью

$$[\lambda] = CD_0^{-1}, \ \lambda = 10^{-5} \frac{\text{км}}{\text{см}}$$

и написать закон: $l = \lambda L$. Однопараметрическая геометрия в базисе C и трехпараметрическая — в базисе CD_0 с законом $l = \lambda L$ равноправны.

Введение абсолютной температуры T в кельвинах (K) соотношением $T = 2T_{\text{кип}}/3k$ также является примером расширения базиса CGS: вместо $T_{\text{кип}}$, имеющей размерность джоуля (C^2GS^{-2}), введен независимый параметр T K, и потому возник новый параметр — постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; поэтому энтропия единицы массы s, по условию $T_s = T_k s_k$, имеет размерность квадрата скорости, деленного на K. Аналогичное положение с количеством тепла Q тела: вместо измерения его в единицах работы (Дж) чаще его измеряют в калориях, т. е. вводят новую единицу (кал); но тогда возникает и новая размерная константа — меха-

нический эквивалент тепла I: $Q_{\text{Дж}}$ тепла составляет $4{,}186\,Q_{\text{кал}}$, т. е. одно и тоже количество тепла в разных единицах равно $Q_{\text{кал}}=Q_{\text{Дж}}/I$; $I=4{,}186$ Дж/кал.

Приведенные примеры показывают, что всякий минимально необходимый базис может быть расширен, т. е. введен базис с увеличенным числом независимых параметров, и тогда возникают дополнительные зависимые. С другой стороны, примеры из кинематики и статики показывают, что трехпараметрический базис в частных задачах может быть сужен. Таким образом, в зависимости от частной задачи МСС базис CGS бывает целесообразно заменить другим, упрощающим решение задачи или ее формулировку.

Пусть (q) — некоторый n-мерный полный базис для размерных физических величин $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, т. е. независимые основные величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$ таковы, что: 1) всякая величина Q_j представима в базисе (q) в виде

$$Q_j = c_j q_1^{\alpha_{j1}} q_2^{\alpha_{j2}} \ldots\ q_n^{\alpha_{jn}} \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{23.14}$$

где c_j, α_{ji} — параметры, не зависящие от q_i, причем *величины, не зависящие от q_i, называются безразмерными*; α_{ji} ($j=1, 2, \ldots, m$, $i=1, 2, \ldots, n$) называются показателями размерности Q_j; 2) всякая безразмерная величина в группе Q_j ($j=1, 2, \ldots, m$), обозначаемая Π, может быть представлена в виде

$$\Pi = Q_1^{\varkappa_1} Q_2^{\varkappa_2} \ldots Q_m^{\varkappa_m}; \tag{23.15}$$

3) не существует, кроме тождественных, никаких соотношений между q_i ($i=1, 2, \ldots, n$).

Пусть *существует* соотношение между величинами Q_j, например любое из уравнений МСС:

$$H(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m) = 0. \tag{23.16}$$

Π-*теорема теории размерностей утверждает*, что соотношение (23.16) всегда может быть преобразовано к виду

$$H_1(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{m-r}) = 0, \tag{23.17}$$

где r — ранг матрицы показателей размерности Q_j, т. е. матрицы

$$\|\alpha_{ji}\| = \left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{matrix}\right\|. \tag{23.18}$$

Первая часть теоремы, по существу, состоит в том, что $H(Q)$ может зависеть только от безразмерных комбинаций типа, и она очевидна, так как результат подстановки (23.14) в (23.16) в про-

тивном случае противоречил бы условию 3). Вторая часть утверждает, что число безразмерных Π_k, которые входят в (23.16), равно числу величин Q_j минус ранг матрицы $\|\alpha_j\|$ их показателей размерности. Простое доказательство сводится к подстановке (23.14) в (23.15), которая дает

$$\Pi = cq_1^{\alpha_{11}\varkappa_1+\alpha_{21}\varkappa_2+\ldots+\alpha_{m1}\varkappa_m} \ldots q_n^{\alpha_{1n}\varkappa_1+\alpha_{2n}\varkappa_2+\ldots+\alpha_{mn}\varkappa_m},$$
$$c = c_1^{\varkappa_1} c_2^{\varkappa_2} \ldots c_m^{\varkappa_m}, \tag{23.19}$$

откуда по определению безразмерных величин 1) следует равенство нулю всех показателей размерности П:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\varkappa_j = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23.20}$$

По условию существования соотношения (23.16) отличные от нуля решения системы (23.20) существуют, т. е. ранг r матрицы (23.18) не равен нулю. Не изменяя общности, квадратную матрицу ранга r в (23.18) можно считать расположенной в левом верхнем углу. Так как *ранг r равен числу линейно-независимых уравнений* в системе (23.20), то, решая первые r уравнений (23.20) относительно $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$, найдем

$$\varkappa_k = \sum_{p=r+1}^{m} A_{kp}\varkappa_p \ (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{23.21}$$

где A_{kp} — отнесенные к определителю $|\alpha_{ji}|$ при $(j, i=1, 2, \ldots, r)$ его алгебраические дополнения, получаемые заменой столбца k показателями α_{kp}; остальные $n-r$ уравнений (23.20) будут линейно-зависимы с (23.21), т. е. будут их следствиями. Внося значения (23.21) в (23.15), получим для любого П *при произвольных* $\varkappa_{r+1}, \ldots, \varkappa_m$:

$$\Pi = \Pi_1^{\varkappa_{r+1}} \Pi_2^{\varkappa_{r+2}} \ldots \Pi_{m-r}^{\varkappa_m}, \tag{23.22}$$

где обозначены независимые безразмерные параметры

$$\Pi_{k-r} = Q_1^{A_{1k}} Q_2^{A_{2k}} \ldots Q_r^{A_{rk}} Q_k \ (k-r = 1, 2, \ldots, m-r). \tag{23.23}$$

Итак, только $m-r$ безразмерных независимых Π_i могут входить в уравнение (23.16), т. е. оно всегда приводимо к виду (23.17).

Эта возможность уменьшать число входящих в уравнения МСС параметров и используется для упрощения их на основе П-теоремы теории размерностей.

Безразмерные параметры и подобие. Пусть некоторая краевая задача МСС, которую обозначим (K), определяется размерными

параметрами $Q_1, \ldots, Q_m$, между которыми существуют соотношения

$$H_s(Q_1, \ldots, Q_m) = 0, \ s = 1, 2, \ldots, N_0, \tag{23.24}$$

и пусть все Q_j состоят из размерных параметров-констант $c_1 \ldots c_{N_c}$, параметров — независимых переменных $x_1, \ldots, x_{N_x}$, параметров — известных функций $f_1(x) \ldots f_{N_f}(x)$ и параметров — искомых функций $\varphi_1 \ldots \varphi_{N_G}$, так что $N_c + N_x + N_f + N_G = m$; согласно (23.24) последние есть функции c_i, x_j, подлежащие определению; размерности всех c_i, x_j, f_l, φ_k в некотором заранее выбранном базисе $q_1, \ldots, q_n$ предполагаются известными.

Найдем согласно (23.23) все независимые безразмерные параметры Π_k ($k=1, 2, \ldots, m-r$) из Q_j, т. е. из (c, x, f, φ); после этого, пользуясь (23.22), т. е. подбирая числа $\varkappa_{r+1} \ldots \varkappa_m$, найдем все независимые между собой *безразмерные постоянные параметры* задачи (K), которые обозначим R_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n_c$):

$$(\Pi)_c = (R_1, R_2, \ldots, R_{n_c}); \tag{23.25}$$

затем аналогично найдем независимые безразмерные Π для группы (c_i, x_j), которые назовем *безразмерными переменными* задачи (K):

$$(\Pi)_{cx} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_x}). \tag{23.26}$$

Наконец, найдем таким же путем все *независимые безразмерные функции* для групп (c_i, x_j, f_l), $(c_i, x_j, f_l, \varphi_k)$:

$$\begin{gathered}(\Pi)_{cxf} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{n_f}); \\ (\Pi)_{cxf\varphi} = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n_\varphi}).\end{gathered} \tag{23.27}$$

Из $(\Pi)_{cx}$ путем подстановки в (23.22) вместо $\Pi_1 \ldots \Pi_{m-r}$ и подбора $(x_{r+1} \ldots x_m)$ могут получаться безразмерные постоянные, но они будут зависимыми от $(\Pi)_c$; аналогично из $(\Pi)_{cxf}$ могут получаться зависимые от $(\Pi)_c$ и $(\Pi)_{cx}$ и из $(\Pi)_{cxf}$ — зависимые от $(\Pi)_c$, $(\Pi)_{cx}$, $(\Pi)_{cxf}$. *Основной группой независимых безразмерных переменных* $(\Pi)_x$ назовем те из $(\Pi)_{cx}$, по отношению к которым группа $(\Pi)_x$ является независимой. Аналогично, *основной группой независимых безразмерных функций* $(\Pi)_f$ назовем те из $(\Pi)_{cxf}$, по отношению к которым $(\Pi)_c$ и $(\Pi)_x$ являются независимыми. Аналогично построим группу $(\Pi)_\varphi$. Подчеркнем, что независимость означает, что при подстановке вместо $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{m-r}$ параметров рассматриваемой независимой группы нельзя найти чисел $\varkappa_{r+1}, \ldots, \varkappa_m$ таких, чтобы получился параметр предыдущей независимой группы. При таком отборе основных групп очевидно, что

все независимые безразмерные параметры задачи (K) будут учтены, все уравнения (23.24) приведутся к виду

$$H_s(\Phi, \mathcal{F}, y, R) = 0 \tag{23.28}$$

и их решения будут иметь вид

$$\Phi = h(\mathcal{F}, y, R), \tag{23.29}$$

где Φ — любая из Φ_k; $\mathcal{F}$, y — все $\mathcal{F}_l$, y_j; R — все R_i. Здесь h — некоторый оператор по переменным $(\Pi)_x$.

Если две краевые задачи $(K)_{\text{М}}$ и $(K)_{\text{Н}}$ таковы, что числа R тождественно совпадают, переменные y, $\mathcal{F}$ имеют одинаковую область изменения и совпадают и уравнения (23.28), т. е. операторы H_s, совпадают, то безразмерные решения (23.29) будут одинаковыми; одна из таких задач — $(K)_{\text{Н}}$ — и называется задачей натуры, другая — $(K)_{\text{М}}$ — задачей модели. Безразмерные постоянные R *называются параметрами подобия*, сами явления в $(K)_{\text{Н}}$ и $(K)_{\text{М}}$ — подобными.

Выяснение параметров R, независимых систем параметров y, $\mathcal{F}$, Φ и приведение уравнений (23.24) к виду (23.28) называют иногда *ревизионным анализом* задачи (K). Как видим, в математическом отношении это чисто алгебраический анализ теории размерностей, основанный на построении параметров (23.23). Он выясняет критерии подобия и приводит задачу к безразмерному виду, т. е. упрощает задачу, так как исключает несущественные параметры. При числовых расчетах и решениях задач на ЭВМ он существенно сокращает вычислительные работы.

§ 24. Примеры ревизионного анализа и некоторые задачи

Рассмотрим некоторый класс *изотермических задач* МСС в декартовых эйлеровых координатах (x_1, x_2, x_3). Уравнения движения

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \tag{24.1}$$

содержат размерные величины $\boldsymbol{x}$, t, $\mathbf{v}$, ρ, p, $\tilde{\sigma}_{ij}$ и $\mathbf{F}$. Уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \tag{24.2}$$

не вводит новых величин; закон связи между напряжениями и деформациями

$$p = P\left|\rho, \frac{\partial v_m}{\partial x_n}\right]_0^t, \tag{24.3}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{S}_{ij}\left[\rho,\ \frac{\partial v_m}{\partial x_n}\right]_0^t,\ \tilde{\sigma}_{ij}\delta_{ij} = 0, \tag{24.4}$$

где скобками отмечены некоторые известные операторы по времени от указанных аргументов, делает систему уравнений МСС замкнутой. Пусть по начальным и граничным условиям некоторой задачи определены постоянный линейный размер l_0 см (размер границы области тела и т. п.), постоянное время t_0 с (период колебания части границы, период изменения внешней нагрузки и т. п.), постоянная скорость v_0 см/с и две постоянные, имеющие размерность напряжения, p_0 Н/см² и σ_0 Н/см² (давление на границе, амплитуда действующего внешнего напряжения и т. п.). Характерное постоянное значение известной массовой силы обозначим g_0 см/с², начальное или другое известное значение искомой величины плотности — ρ_0 Н·с²/см⁴. Начальными и граничными условиями, возможно, заданы и другие постоянные, но мы ограничимся здесь классом задач, в которых заданы только перечисленные постоянные или еще другие, одинаковые с ними по размерностям.

Трехмерный базис единиц измерения примем CNS (например, сантиметр, ньютон, секунда). Перечисленные семь постоянных l_0, t_0, v_0, g_0, ρ_0, p_0, σ_0 в трехмерном базисе, очевидно, образуют только четыре основных постоянных безразмерных параметра:

$$R_1 = \frac{l_0}{v_0 t_0},\ R_2 = \frac{v_0^2}{l_0 g_0},\ R_3 = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2},\ R_4 = \frac{\sigma_0}{\rho_0 v_0^2}, \tag{24.5}$$

остальные (если заданы еще l_1, t_1, v_1, g_1, ρ_1, σ_1) обозначим одной буквой R' $(R'_l = l_1/l_0,\ R'_t = t_1/t_0,\ \ldots,\ R'_\sigma = \sigma_1/\sigma_0)$. Независимые переменные x_1, x_2, x_3 и t имеют размерности C и S, и потому группа основных независимых переменных $(\Pi)_{cx}$ состоит из четырех:

$$y_i \equiv x_i^* = \frac{x_i}{l_0},\ y_4 \equiv t^* = \frac{t}{t_0},\ i = 1, 2, 3; \tag{24.6}$$

группа $(\Pi)_{cxf}$ — из трех: $\underset{\sim}{\mathcal{F}_i} = F_i/g_0$ и нескольких граничных. Искомые функции ρ, p, $\mathbf{v}$, $\tilde{\sigma}_{ij}$ образуют два скаляра и один девиатор

$$\rho^* \equiv \Phi_1 = \frac{\rho}{\rho_0},\quad p^* = \Phi_2 = \frac{p}{p_0},$$

$$v_i^* \equiv \Phi_i^3 = \frac{v_i}{v_0},\ \tilde{\sigma}_{ij}^* \equiv \Phi_{ij}^4 = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\sigma_0}. \tag{24.7}$$

Внося значения x_i, t и ρ, p, $\tilde{\sigma}_{ij}$ из (24.6) и (24.7) в (24.1) и (24.2), учитывая (24.5), получим безразмерные уравнения

$$R_1\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*}+v_j^*\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*}=\frac{1}{R_2}\rho^* F_i^*-R_3\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*}+R_4\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial\widetilde{\sigma}_{ij}^*}{\partial x_j^*},$$

$$R_1\frac{\partial\rho^*}{\partial t^*}+\frac{\partial}{\partial x_i^*}(\rho^* v_i^*)=0. \tag{24.8}$$

Из (24.3), (24.4), (24.7) следует, что операторы P, S_{ij} должны иметь размерность p_0 и σ_0; но это — характеристики свойств вещества, а не краевой задачи, и потому они не могут зависеть от перечисленных выше постоянных l_0, t_0, v_0, g_0, p_0, ρ_0, σ_0. Эти операторы имеют свои безразмерные постоянные структуры P_s, σ_s с размерностью Н/см^2, т. е. они имеют вид

$$p=P_s P^*\left[\rho,\ \frac{\partial v_m}{\partial x_n}\right]_0^t,\quad \widetilde{\sigma}_{ij}=\sigma_s S_{ij}^*\left[\rho,\ \frac{\partial v_m}{\partial x_n}\right]_0^t, \tag{24.9}$$

где P^*, S_{ij}^* — безразмерные операторы по размерному t от размерных параметров. Но такие зависимости возможны только при условии, что вещество характеризуется еще по крайней мере двумя физическими постоянными: плотностью ρ_s и временем t_s или ρ_s и μ_s, имеющей размерность Н·с/см^2, или другой парой независимых постоянных, таких, что вместе с p_s или σ_s они составляют трехмерный базис, получающийся из CNS преобразованием структуры. Такой базис позволяет построить константы t_s, p_s, μ_s. Тогда из них и функций ρ, $\frac{\partial v_m}{\partial x_n}$ можно построить безразмерные переменные и функции

$$\frac{t}{t_s}=\frac{t_0}{t_s}t^*;\quad \frac{\rho}{\rho_s}=\frac{\rho_0}{\rho_s}\rho^*;\quad t_s\frac{\partial v_m}{\partial x_n}=\frac{t_s v_0}{l_0}\cdot\frac{\partial v_m^*}{\partial x_n^*};$$

$$\frac{\mu_s}{\sigma_s}\cdot\frac{\partial v_m}{\partial x_n}=\frac{\mu_s v_0}{\sigma_s l_0}\cdot\frac{\partial v_m^*}{\partial x_n^*},\ \ldots .$$

Операторы P^* и S_{ij}^* следовательно, обязательно имеют вид

$$P^*=P^*\left[\frac{1}{R_5}\rho^*(t_1^*,\ \boldsymbol{x}^*),\ \frac{1}{R_6}\frac{\partial v_m^*(t_1,\ \boldsymbol{x})}{\partial x_n^*}\right]_{t_1^*=0}^{t_1^*=t^*},\quad S_{ij}^*=S_{ij}^*[\ldots]_0^{t^*}, \tag{24.10}$$

где обозначены

$$R_5=\frac{\rho_s}{\rho_0},\quad R_6=\frac{\sigma_s l_0}{\mu_s v_0}=\frac{l_0}{t_s v_0},\quad R_7=\frac{\sigma_s}{\sigma_0}, \tag{24.11}$$

причем в (24.10) могут входить еще и другие *безразмерные* физические постоянные; параметр R_7 возникает из равенства $\sigma_0\widetilde{\sigma}_{ij}^*=\sigma_s S_{ij}^*$.

Система уравнений (24.8), (24.10) представляет безразмерный вид уравнений (24.1), (24.2), (24.3), (24.4); вместе с граничными условиями, которые при использовании констант l_0, t_0, v_0, g_0, ρ_0, p_0, σ_{s0} и параметров (24.5) станут безразмерными, они определяют (K).

Решение рассматриваемого класса задач имеет вид

$$\rho = \rho_0 \rho^* (t^*, \boldsymbol{x}^*, \mathbf{F}^*, R_1, \ldots, R_4, R_5, R_6, R_7), \tag{24.12}$$

$$p = p_0 P^* (\ldots), \; v_i = v_0 \overset{*}{v_i} (\ldots), \; \sigma_{ij} = \widetilde{\sigma}_0 \widetilde{\overset{*}{\sigma}}_{ij} (\ldots).$$

Скобки (...) содержат перечисленные для ρ^* аргументы и (при $\mathbf{F}^* = \text{const}$) ρ^*, P^*, v^*, $\overset{*}{\sigma}_{ij}$ — некоторые их функции.

1. Тяжелая несжимаемая идеальная жидкость (§ 14): $\rho = \rho_0 = \rho_s = \text{const}$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_s = 0$, давление $p = P_s P^*$ неопределенно и является искомой функцией ($\boldsymbol{x}^*$, t^*). Заданы постоянные t_0, l_0, v_0, g_0, ρ_0. Параметры подобия (24.5), (24.11) сводятся к

$$R_1 = \frac{l_0}{v_0 t_0}, \quad R_2 = \frac{v_0^2}{l_0 g_0}, \quad R_3 = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}. \tag{24.13}$$

R_2 называется параметром Фруда. Давление в любой точке $\boldsymbol{x}$ в момент t в воде равно $p_0 \Phi_2$

$$p = R_3 \rho_0 v_0^2 \Phi_2 \left(\frac{\boldsymbol{x}}{l_0}, \; \frac{t}{t_0}; \; R_1, \; R_2, \; R_3 \right). \tag{24.14}$$

Если движение установившееся (t_0 не задано), имеется свободная поверхность и задано только давление на ней $p_1 = 0$, то p_0 не задано, и остается взять $p_0 = \rho_0 g_0 l_0$, следовательно, $R_2 R_3 = 1$. При этом в (24.14) $\Phi_2 = \Phi_2 \left(\frac{\boldsymbol{x}}{l_0}, \; R_2 \right)$.

2. Невесомый идеальный баротропный газ (§ 14): движение установившееся: $g_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_s = \mu_s = 0$; заданы p_s, ρ_s (следовательно, энтропия); уравнения (24.4) дают

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = 0, \; p = p_s \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\gamma}, \; \rho_0 = \rho_s \left(\frac{p_0}{p_s} \right)^{1/\gamma};$$

заданные размерные постоянные l_0, v_0, p_0, ρ_0, $c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ (c_0 — скорость звука при давлении p_0). Постоянные параметры (24.5), (24.11), отличные от 0, ∞:

$$\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \text{Ca} = M_0 = \frac{v_0}{c_0}, \; R_p' = \frac{p_s}{p_0}, \tag{24.15}$$

где Ca — параметр Коши, обозначаемый часто через M_0 и называемый числом Маха при $p = p_0$. Истечение газа через сопло Ла-

валя (коническую расширяющуюся трубу с минимальным диаметром $d=l_0$) из большой емкости, в которой $p=p_s$, $\rho=\rho_s$, в воздух, где давление p_0, плотность ρ_0, определяется скоростью $\mathbf{v}=v_0\mathbf{v}^*$ и давлением $p=p_0p^*$:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*\left(\frac{x}{l_0}, \quad \frac{p_s}{p_0}, \; M_0\right), \; p^* = p^*\left(\frac{x}{l_0}, \quad \frac{p_s}{p_0}, \quad M_0\right). \qquad (24.16)$$

3. **Вязкая невесомая ($g_0=0$) несжимаемая жидкость** (§ 15) при установившемся движении в ней тела со скоростью v_0; коэффициент вязкости жидкости $\mu=\mu_s$, плотность $\rho=\rho_0$, характерный размер тела l_0. Соотношения (24.3), (24.4)

$$p \text{ — неопределенно}, \; \tilde{\sigma}_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

приводятся к виду (24.9), (24.10)

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_s\left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*}\right), \quad \sigma_s = \frac{\mu v_0}{l_0}.$$

Параметры (24.5), (24.11) сводятся к R_3, R_4, R_7 или к независимым

$$R_3 = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}, \quad \frac{1}{R_4 R_7} = \frac{\rho_0 l_0 v_0}{\mu} = \frac{l_0 v_0}{\nu} = Re, \qquad (24.17)$$

поскольку σ_0 не задано, (R_4, R_7 по отдельности неопределенны). Решение этих задач имеет вид

$$v_i = v_0 v_i^*, \quad p = p_0 p^*, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\mu v_0}{l_0} S_{ij}^*,$$

$$v_i^* = v_i^*\left(\frac{x}{l_0}, \; Re, \; R_3\right), \quad p^* = p^*\left(\frac{x}{l_0}, \; Re, \; R_3\right),$$

$$S_{ij}^* = S_{ij}^*\left(\frac{x}{l_0}, \; Re, \; R_3\right), \qquad (24.18)$$

Re называется числом Рейнольдса и вместе с R_3, зависящим от давления на границе области течения, определяет структуру потока. Сила сопротивления тела получится интегрированием по поверхности тела проекции σ_{ij} на направление скорости тела, т. е. будет равна

$$\mathscr{P} = c\mu v_0 l_0 + c_1 \rho_0 v_0^2 l_0^2,$$

$$c = c(Re, \; R_3), \quad c_1 = c_1(Re, \; R_3). \qquad (24.19)$$

При медленных движениях $v_0 \to 0$ второе слагаемое выражения $\mathscr{P}$ исчезнет, первое при $Re \to 0$, $R_3 \to \infty$ будет линейной функцией v_0,

коэффициент c будет постоянным. Для шара (например капли росы) $\mathscr{P} = c\mu v_0 l_0$, $l_0 = d$, $c = 6\pi$.

4. Идеально упругое изотропное твердое тело в равновесии (§ 16, 17). Характерные константы тела — размер l_0, плотность $\rho_0 = \rho_s$, модуль объемной упругости $p_s = K$ Н/см², модуль сдвига G Н/см² ($\sigma_s = 2G$); внешние нагрузки: объемная сила $\rho\mathbf{F}$ характеризуется удельным весом $\rho_0 g_0$, поверхностная — распределенной σ_0 Н/см² и сосредоточенной $\mathscr{P}_0$ Н; перемещение границы характеризуется постоянной u_0 см. Операторы P^*, $\overset{*}{S}_{ij}$ — просто функции тензора деформаций

$$P^* = P^*(\varepsilon_{mn}), \quad \overset{*}{S}_{ij} = \overset{*}{S}_{ij}(\varepsilon_{mn}),$$

$$2\varepsilon_{mn} = \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_k}{\partial x_n}, \tag{24.20}$$

где x_1, x_2, x_3 — лагранжевы (при $t = 0$ — декартовы) координаты точек тела, связанные с вектором скорости $\mathbf{v}$ соотношением

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \mathbf{v}(x, t), \quad x = \mathrm{x} + \mathbf{u}(\mathrm{x}, t), \tag{24.21}$$

$$t = 0, \quad \mathbf{u} = 0.$$

Время t — вспомогательный параметр, константы t_0, v_0 не заданы. Из группы (24.5) и (24.11) и данных K, G, $\mathscr{P}_0$ находим безразмерные параметры

$$r_1 = \frac{\mathscr{P}_0}{2Gl_0^2}, \quad r_2 = \frac{\rho_0 g_0 l_0}{2G}, \quad r_3 = \frac{\sigma_0}{2G}, \quad r_4 = \frac{u_0}{l_0},$$

$$r_5 = \frac{2G}{3K} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}. \tag{24.22}$$

Первые четыре характеризуют степени деформации от силы $\mathscr{P}_0$, от веса, от σ_0 и от перемещения u_0, пятое выражается через коэффициент Пуассона тела ν. Перемещения и напряжения в любой точке тела выражаются функциями

$$u_i = l_0 \overset{*}{u}_i\left(\frac{\mathrm{x}}{l_0}, r_1, \ldots, r_5\right), \quad \sigma_{ij} = 2G\overset{*}{\sigma}_{ij}\left(\frac{\mathrm{x}}{l_0}, r_1, \ldots, r_5\right), \tag{24.23}$$

а при малых деформациях — линейными функциями r_n ($n \neq 5$):

$$u_i = l_0 \sum_{n=1}^{4} r_n \varphi_{in}\left(\frac{\mathrm{x}}{l_0}, \nu\right), \quad \sigma_{ij} = 2G\sum_{n=1}^{4} r_n \varphi_{ij}^n\left(\frac{\mathrm{x}}{l_0}, \nu\right). \tag{24.24}$$

Если геометрически подобно уменьшить все размеры тела в N раз, сохраняя неизменными конфигурацию нагрузок на поверх-

ности и константы материала (G, ν), то подобие будет соблюдаться, т. е. $\overset{*}{u}_i$, $\overset{*}{\sigma}_{ij}$ будут одинаковыми в точках $\mathbf{x}/l_0$, если $\rho_0 g_0 l_0$, u_0/l_0, σ_0 останутся без изменения, т. е. если $\mathscr{P}_0$ уменьшается в N^2 раз, удельный вес $\gamma_0=\rho_0 g_0$ увеличится в N раз, заданное перемещение u_0 уменьшится в N раз. Такое моделирование реализуется на *центрифугах.*

5. Динамика сред, обладающих склерономными свойствами (§ 14, 16, 17, 20) в отношении задаваемых внешних констант, отличается от п. 4 заданием характерного времени t_0 (или частоты ω_0) действия нагрузки и скорости v_0 какой-то части среды. В отношении свойств среды существенное отличие в том, что задана плотность $\rho_0=\rho_s$ и известно, что операторы P^* и $\overset{*}{S}_{ij}$ — функции ε_{ij} или функционалы функций ε_{mn} по инвариантному параметру, составленному из них же (например, по $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj}$). Константы K, G, ν остаются и, может быть, дополняются еще группой K', G', ν' той же размерности. Возникают, следовательно, дополнительные постоянные параметры вещества — одна, две (или больше) *скорости звука*:

$$c_1=\sqrt{\frac{3K+4G}{3\rho_0}},\quad c_2=\sqrt{\frac{G}{\rho_0}}. \tag{24.25}$$

Безразмерные параметры r_1, ..., r_5 (24.22) дополняются динамическими

$$r_6=\frac{l_0}{c_1 t_0}=\frac{l_0\omega_0}{c_1},\quad r_7=\frac{v_0}{c_1}=M_0. \tag{24.26}$$

Решение задач сохраняет вид (24.23), но в число аргументов $\overset{*}{u}_i$, $\overset{*}{\sigma}_{ij}$ войдут еще переменная $c_1 t/l_0$ и постоянные r_6 и r_7 (24.26). В линейной динамической теории упругости сохранятся выражения (24.24), но сумма будет по пяти r_n ($n=1$, 2, 3, 4, 7) и функции φ будут иметь аргументы

$$\varphi=\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{l_0},\ \frac{c_1 t}{l_0};\ \nu\right). \tag{24.27}$$

Моделирование динамических явлений на центрифугах уже невозможно, так как кориолисовы ускорения будут вносить искажения. Для моделирования динамики геометрически подобных областей сред созданы *линейные ускорители.* Уменьшая линейный размер l_0 натуры в N раз, при неизменных свойствах материала необходимо соблюдение постоянства σ_0, $\mathscr{P}_0/l_0^2$, $\rho_0 g_0 l_0$, u_0/l_0 и еще из (24.26) сохранение v_0 и $l_0\omega_0=l_0/t_0$; в дополнение к условиям п. 4 необходимо задавать одинаковыми скорости v_0 и в N раз увеличивать частоту ω_0 (или уменьшать время приложения нагрузки t_0).

На рис. 24.1 показан результат испытания небольшого бетонного блока на взрыв зарядом Q_0 около одного грамма тротила. Блок имел размер L_0 около 20 см, глубина заложения заряда около 6 см. Образовавшаяся после взрыва на линейном ускорителе полость диаметром d_0 около 4 см не вскрылась. Если увеличить линейный масштаб в $N=10^3$, то получим для натуры $L_0 \sim 0{,}2$ *км*, $h_0 \sim 60$ *м*, $d_0 \sim 40$ *м*, причем необходимый заряд $Q=N^3Q_0 \sim 1000$ *т*.

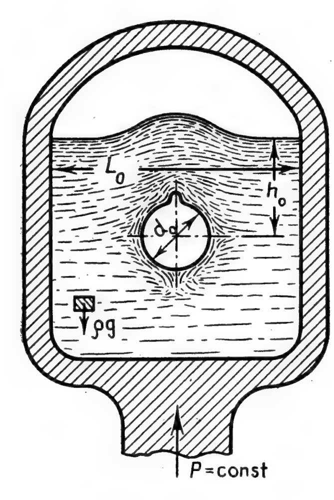


Рис. 24. 1

6. Примеры решения задач МСС или их упрощения, получаемые на основе π-теоремы (§ 14, 18, п. 2).

а) Внедрение жесткого конуса с постоянной скоростью v в идеально пластическое несжимаемое невесомое полупространство. Даны плотность среды ρ, предел текучести σ_sкг/см^2, угол раствора конуса α. Вместо времени t примем за независимую переменную глубину погружения $h=vt$. Найдем площадь контакта s и силу сопротивления $\mathscr{P}$. Полная группа безразмерных параметров: постоянные сводятся к двум $\sigma_s/\rho v^2$ и α; переменных нет; искомые $\Phi_1=\mathscr{P}/\rho v\, h^2$, $\Phi_2=s/h^2$. Согласно π-теореме Φ_1, Φ_2 зависят только от $\sigma_s/\rho v^2$ и α, т. е. получаем формулы

$$\mathscr{P}=\rho v^2 h^2 \Phi_1\left(\frac{\sigma_s}{\rho v^2},\ \alpha\right),\quad s=h^2\Phi_2\left(\frac{\sigma_s}{\rho v^2},\ \alpha\right),\qquad (24.28)$$

функции Φ_1, Φ_2 можно найти теоретически и из опытов. Для идеальной жидкости $\sigma_s=0$, и потому Φ_1, Φ_2 постоянны (зависят от α).

б) Сосредоточенная сила $\mathscr{P}$ статически действует на границу упругого полупространства по нормали (§ 16); найти перемещение $\mathbf{u}$ и напряжения σ_{ij} в любой точке $M(r,\ \varphi)$ среды, где r, φ — сферические координаты любой точки относительно точки приложения силы, φ — широта. Безразмерные: одна постоянная ν; две переменных φ, $\mathscr{P}/2\,Gr^2$; функции $\mathbf{\Phi}_1=\mathbf{u}/r$, $\Phi_{ij}=\sigma_{ij}/2\,G$. Следовательно,

$$\mathbf{u}=r\mathbf{\Phi}_1\left(\frac{\mathscr{P}}{2Gr^2},\ \varphi,\ \nu\right),\quad \sigma_{ij}=2G\Phi_{ij}\left(\frac{\mathscr{P}}{2Gr^2},\ \varphi,\ \nu\right).\qquad (24.29)$$

Но при малых деформациях $\mathbf{u}$ и σ_{ij} зависят от $\mathscr{P}$ линейно, следовательно, зависимость решения от r найдена явно:

$$\mathbf{u}=r\frac{\mathscr{P}}{2Gr^2}\mathbf{\Phi}(\varphi,\ \nu)=\frac{\mathscr{P}}{2Gr}\mathbf{\Phi}(\varphi,\ \nu),$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathcal{P}}{r^2} \bar{\Phi}_{ij}^0 (\varphi, \nu). \tag{24.30}$$

Вектор $\mathbf{\Phi}(\varphi, \nu)$ находится из дифференциального уравнения Ляме (16.10) при $\rho_0=0$, $\beta=0$, которое приводится к обыкновенному линейному уравнению второго порядка.

в) Ударная волна в бесконечной цилиндрической трубе с осью x (§ 14). Покоящийся газ с плотностью ρ_1, давлением p_1, показателем политропы γ находится справа ($x>0$) от сечения $x=0$, в котором расположен поршень, начинающий двигаться в момент $t=0$ вдоль оси с постоянной скоростью v_0. Найти давление на поршень и движение газа, считая состояние его не зависящим от поперечных координат. Заданные константы определяют скорость звука в невозмущенном газе $c_0=\sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$; независимые переменные x, t образуют единственную безразмерную переменную $\zeta = c_0 t/x$, искомые функции — безразмерные v/c_0, p/p_1; безразмерные константы сводятся к γ и $M_0=v_0/c_0$. По π-теореме имеем

$$v = c_0\Phi_1(\gamma, M_0, \zeta), \quad \rho = \rho_1\Phi_2(\gamma, M_0, \zeta), \quad p = p_1\Phi_3(\gamma, M_0, \zeta), \tag{24.31}$$

т. е. уравнения в частных производных (14.4), (14.6) согласно преобразованиям производных

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\zeta}{t}\frac{d}{d\zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\zeta^2}{t}\frac{d}{d\zeta}$$

становятся обыкновенными

$$\zeta(1-\zeta v)\frac{dv}{d\zeta} = \frac{\zeta^2}{\rho}\frac{dp}{d\zeta}, \quad \zeta(1-\zeta v)\frac{d\rho}{d\zeta} = 0. \tag{24.32$'$}$$

Пренебрегая теплообменом между частицами газа в области течения, находим из (14.29), (14.25)

$$t\frac{ds}{dt} = \zeta(1-v\zeta)\frac{ds}{d\zeta} = 0, \quad s = c_v \ln\frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const}. \tag{24.32$''$}$$

Система трех уравнений (24.32) для трех функций v, ρ, p с начальным условием $\zeta=0$ ($t=0$), $v=v_1=0$, $p=p_1$, $\rho=\rho_1$ и граничным условием на поршне: $v=v_0$ при $x=v_0 t$ или при $\zeta=M_0^{-1}$ ($M_0=v_0/c_0$) имеет два различных решения. При положительной скорости поршня ($v_0>0$, $M_0>0$) решение имеет вид ударной волны

$$v = v_2 = \text{const} = v_0, \quad p = p_2 = \text{const}, \tag{24.33}$$

причем эти постоянные возникают скачком на фронте $x=Dt$, и вместе с D определяются из (13.23), (14.30). При $v_0<0$ энтропия не изменяется на фронте $x=c_0 t$, и решение находится из (24.32$'$) при условии $p/p_1=(\rho/\rho_1)^\gamma$.

Решения задач МСС, получаемые на основе π-теоремы путем уменьшения числа независимых переменных и функций, называются *автомодельными*, например решения (24.3), (24.28), (24.30), (24.31).

§ 25. Квазилинейные уравнения и общие преобразования

Автомодельные решения задач МСС получаются за счет преобразования координат, времени и искомых функций к новым безразмерным переменным, определяемым методами теории размерностей. При этом не накладывается каких-либо существенных ограничений на вид функционалов $\tilde{\mathcal{F}}$ и операторов H (23.16), их приведение к виду (23.17) всегда возможно и эффективно. Во многих классах задач МСС функционалы $\tilde{\mathcal{F}}$ являются функциями $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{V}$, и операторы H представляют собой квазилинейные дифференциальные операторы с частными производными искомых функций по $\mathbf{x}$ и t первого порядка. С точки зрения теории размерностей это не вносит упрощений при отыскании безразмерных комбинаций из констант, координат, времени и искомых функций. Но в этом случае более общий метод групповых переменных Ли позволяет найти класс интегрально-инвариантных преобразований системы H (23.16) (если они существуют), включающий автомодельные.

В классических и некоторых теориях сред со сложными свойствами функционал состояния $\tilde{\mathcal{F}}$, энтропия s и рассеяние w^* в лагранжевых координатах — просто функции аргументов A^i_j, D^i_j. выражающихся через $x(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} - v^i = 0, \quad \frac{\partial x^i}{\partial \mathrm{x}^j} - A^i_j = 0, \quad \frac{\partial v^i}{\partial \mathrm{x}^j} - D^i_j = 0, \tag{25.1}$$

и температуры

$$S^{mn} = \mathcal{F}^{mn}(A^i_j,\ D^p_r,\ T), \quad s = s(A^i_j,\ T),$$
$$w^* = w^*(A^i_j,\ D^p_r,\ T). \tag{25.2}$$

Уравнения движения (12.2) и теплопроводности (12.12) приводятся к следующей системе квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно v^i, A^i_j, D^i_j, T, q^i

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} - X^i\right) = [(\delta^i_p \delta^r_n + E^r_p A^i_n)\mathcal{F}^{mn} + \mathcal{F}^{mn}_{,A^p_r} A^i_n] \frac{\partial A^p_r}{\partial \mathrm{x}^m} +$$
$$+ A^i_n \mathcal{F}^{mn}_{,D^p_r} \frac{\partial D^p_r}{\partial \mathrm{x}^m} + A^i_n \mathcal{F}^{mn}_{,T} \frac{\partial T}{\partial \mathrm{x}^m};$$

$$\rho T s_{,T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q^m}{\partial x^m} - q^i B_p^r \frac{\partial A_r^p}{\partial x^i} - \rho T s_{,A_r^p} D_r^p + w^*; \qquad (25.3)$$

$$\lambda g^{im} \frac{\partial T}{\partial x^m} = -q^i \qquad \left(\rho = \frac{\rho_0}{A}\right).$$

Вместе с (25.1) получилась замкнутая система 28 уравнений относительно 28 искомых функций x^i, v^i, q^i, T, A_j^i, $D_j^i (i,\ j = 1,\ 2,\ 3.)$ Коэффициенты уравнений (25.3) вида $\mathcal{F}_{,z}^{mn}$ и $s_{,z}$ означают частные производные функций (25.2) по соответствующим переменным $(z = A_r^p,\ D_r^p,\ T)$.

Существование групповых переменных Ли определяется аналитическим представлением функций $\mathcal{F}^{mn}$, s, w^*, λ и числом уравнений. Поскольку эти функции строятся по экспериментальным данным, их можно представлять различными аппроксимациями, и некоторые могут привести к существованию групповых переменных. Число уравнений в частных задачах может существенно уменьшаться. Например, при малых деформациях и обратимых процессах в случае, если s зависит только от T, задача теплопроводности выделяется в самостоятельную, и последние четыре уравнения системы (25.3) становятся замкнутой системой. Аппроксимируем зависимость между коэффициентом теплопроводности λ, энтропией s и температурой T формулой, содержащей две произвольные постоянные k и k_1:

$$\lambda = k_1 \rho_0 \frac{ds}{dT} e^{k\rho_0 \int\limits_0^s T ds}, \qquad (25.4)$$

и обозначим

$$\mathcal{T} = k\rho_0 \int\limits_0^s T ds, \quad u^m = -kq^m, \quad \tau = \frac{t}{k_1}, \quad z^m = \frac{x^m}{k_1}. \qquad (25.5)$$

Тогда получим систему

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} - \frac{\partial u^m}{\partial z^m} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z^m} - e^{-\mathcal{T}} u^m = 0, \quad m = 1,\ 2,\ 3, \qquad (25.6)$$

а в случае одномерной задачи — два уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z} - e^{-\mathcal{T}} u = 0. \qquad (25.7)$$

Теория размерностей, как можно проверить, приводит к двум безразмерным переменным, пропорциональным $\xi = x/\sqrt{t}$ и $u\sqrt{t}$, и потому

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\xi), \quad u = \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{\tau}}. \tag{25.7'}$$

После этого система (25.7) интегрируется, т. е. находится частное решение (25.7), соответствующее группе преобразований (25.7′). Излагаемый ниже метод в этом примере позволяет найти еще одну существенно отличающуюся от (25.7′) группу преобразований, также сводящую задачу к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Пусть дана система N квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка по N_x независимым переменным x относительно N_y неизвестных независимых между собой функций $y(x)$, причем для x всюду примем индексы (i, j) для y — (k, l):

$$x : x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^j, \ldots, x^{N_x} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, N_x); \tag{25.8}$$
$$y : y^1, y^2, \ldots, y^k, \ldots, y^l, \ldots, y^{N_y} \quad (k, l = 1, 2, \ldots, N_y),$$

частные производные y по x обозначим p:

$$p = \frac{dy}{dx} : p_i^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}, \quad p_j^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^j}, \ \ldots. \tag{25.9}$$

Тогда исходная система уравнений запишется в виде

$$\check{H}_s(x, y, p) \equiv \hat{H}_s(x, y)\,p + H_s^0(x, y) \equiv H_{sk}^i(x, y)\,p_i^k + H_s^0(x, y) = 0,$$
$$s = 1, 2, \ldots, N. \tag{25.10}$$

Рассмотрим некоторое взаимно-однозначное преобразование всех переменных x, y к новым x', y':

$$x' = f'(x, y) : x'^i = f'^i(x, y), \quad i = 1, 2, \ldots, N_x; \tag{25.11}$$
$$y' = \mathcal{F}'(x, y) : y'^k = \mathcal{F}'^k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots N_y;$$
$$x = f(x', y') : x^i = f^i(x', y');$$
$$y = \mathcal{F}(x', y') : y^k = \mathcal{F}^k(x', y').$$

Подставляя x, y в (25.10), получим преобразованные выражения коэффициентов в переменных x', y' и уравнения

$$\check{H}_s(x, y, p) = \hat{H}_s(f, \mathcal{F})\,p + H_s^0(f, \mathcal{F}) = \hat{H}'_s(x', y')\,p + H_s'^0(x', y') = 0. \tag{25.12}$$

Решением (25.10) называется $y = y(x)$, а в новых переменных $y' = y'(x')$, причем $p = \partial y/\partial x$, $p' = \partial y'/\partial x'$. Дифференцируя по x' при $y' = y'(x')$ равенство $y = y(x)$:

$$\mathcal{F}(x', y') = y(f(x', y')),$$

получим уравнение для определения p через p':

$$\frac{D\mathscr{F}}{Dx'} = p\,\frac{Df}{Dx'}, \quad \frac{D}{Dx'} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'}\cdot p'. \qquad (25.13')$$

В компонентах (25.13′) означает систему $N_y \cdot N_x$ уравнений для такого же числа p_i^k $(i = 1, 2, \ldots, N_x,\ k = 1, 2, \ldots, N_y)$:

$$\frac{D\mathscr{F}^k}{Dx'^i} = p_j^k\,\frac{Df^j}{Dx'^i}; \quad \frac{D}{Dx'^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^i} + p_i'^l\,\frac{\partial}{\partial y'^l}. \qquad (25.13)$$

Обозначая $\mathscr{P}$ определитель квадратной матрицы $(N_x \times N_x)$

$$\mathscr{P} = |z_i^j|, \quad z_i^j = \frac{Df^j}{Dx'^i} = \frac{\partial f^j}{\partial x'^i} + p_i'^l\,\frac{\partial f^j}{\partial y'^l}, \qquad (25.14)$$

являющийся полиномом N_x степени относительно всех $p_i'^k$, находим все p_i^k:

$$\mathscr{P}(z) \equiv |z|, \quad \mathscr{P}(z)\,p = \widehat{\mathscr{P}}(z)\,\frac{D\mathscr{F}}{Dx'}, \quad \widehat{\mathscr{P}}(z) \equiv \frac{\partial \mathscr{P}(z)}{\partial z}:$$

$$\mathscr{P}(z) \equiv |z_i^j|, \quad \mathscr{P}(z)\,p_i^k = \mathscr{P}_i^j(z)\,\frac{\partial \mathscr{F}^k}{\partial x'^j}, \quad \mathscr{P}_i^j(z) \equiv \frac{\partial \mathscr{P}(z)}{\partial z_j^i}. \quad (25.15)$$

Следовательно, уравнения (25.12) принимают вид

$$\widehat{H}_s(f, \mathscr{F})\,\widehat{\mathscr{P}}(z)\,\frac{D\mathscr{F}}{Dx'} + \mathscr{P}(z)\,H_s^0(f, \mathscr{F}) = 0, \; z \equiv \frac{Df}{Dx'}; \; s = 1, 2, \ldots N. \qquad (25.16')$$

Это уравнения в частных производных первого порядка: степени N_x относительно p'; степени N_x относительно частных производных $\partial f/\partial x'$, $\partial f/\partial y'$; линейные относительно $\partial \mathscr{F}/\partial x'$, $\partial \mathscr{F}/\partial y'$; *однородные* относительно частных производных f и $\mathscr{F}$ по x', y'. В координатной записи они имеют вид

$$H_{sk}^i(f, \mathscr{F})\,\mathscr{P}_i^j(z)\,\frac{D\mathscr{F}^k}{Dx'^j} + \mathscr{P}(z)\,H_s^0(f, \mathscr{F}) = 0; \quad s = 1, 2, \ldots, N; \qquad (25.16)$$

$$z_i^j \equiv \frac{Df^j}{Dx'^i} \quad k = 1, 2, \ldots, N_y; \quad i, j = 1, 2, \ldots, N_x.$$

Уравнения (25.16) при удачном частном выборе функций $f(x', y')$, $\mathscr{F}(x', y')$ могут оказаться проще уравнений (25.10); они *совпадут при тождественных преобразованиях*:

$$x = \overset{0}{f}(x', y') \equiv x', \quad y = \overset{0}{\mathscr{F}}(x', y') \equiv y', \qquad (25.17)$$

поскольку в этом случае

$$\overset{0}{z}{}^i_j = \delta^i_j, \quad \overset{0}{\mathscr{P}} = 1, \quad \overset{0}{\mathscr{P}}{}^j_i = \delta^j_i; \quad \frac{D\overset{0}{\mathscr{F}}{}^k}{Dx'^j} = p^m_j \delta^k_m = p^k_j. \qquad (25.17')$$

Существенное упрощение $\widehat{H}_s$ системы (25.16) сравнительно с (25.10) может происходить только для *частных видов* $\widehat{H}_s$ (25.10), т. е. коэффициентов $H^i_{sk}(x, y)$, $H^0_s(x, y)$. Таким образом, ставится вопрос: каковы *все неизвестные преобразования* $x=f(x', y')$, $y=\mathscr{F}(x', y')$, при которых данные уравнения (25.10) допускают существенное упрощение, т. е. в виде (25.16) содержат меньшее ($<N_x$) число новых независимых переменных x', функций y', либо тех и других?

Существенное упрощение произойдет, если в системе (25.16) пропадет одна из x', например $x^{\alpha'}$ (α — фиксированное число из $i=1, 2, \ldots, N_x$). Для этого необходимо и достаточно, чтобы в уравнениях (25.16), представляющих полиномы относительно p' степени N_x, коэффициенты при всех одночленах, содержащих p^{α}_k (при всех $k=1, 2, \ldots, N$) обратились в нуль и чтобы все остальные коэффициенты и свободные члены не зависели от x'^{α}. Это требование приводит к переопределенной системе дифференциальных уравнений относительно f и $\mathscr{F}$. Если при данных $H^i_{sk}(f, \mathscr{F}), H^0_s(f, \mathscr{F})$ полученная система имеет только тождественное решение $f=f^0\equiv x'$, $\mathscr{F}=\mathscr{F}^0\equiv y'$, то уравнения (25.10) не допускают рассматриваемого упрощения. Перебором чисел можно выяснить другие возможные упрощения этого типа.

Общий наиболее простой ответ на поставленный вопрос дает теория групп Ли преобразований (25.11), содержащих некоторое число параметров-констант, и соответствующих линейных дифференциальных операторов, также образующих группу.

Однопараметрическое преобразование (25.11) с параметром λ, включающее тождественное, можно задать в виде N_x функций $\xi^i(x, y)$ и N_y функций $\eta^k(x, y)$, связывающих x', y' с x, y системой обыкновенных дифференциальных уравнений по параметру λ и начальными условиями

$$\frac{dx'^i}{d\lambda} = \xi^i(x', y'), \quad \frac{dy'^k}{d\lambda} = \eta^k(x', y');$$

$$\lambda = 0, \quad x'^i = x^i, \quad y'^k = y^k. \qquad (25.18)$$

Решение системы (25.18) имеет вид соотношений (25.11)

$$x = \varphi(x', y', \lambda), \quad y = \psi(x', y', \lambda),$$

и потому задача отыскания существенно упрощающих систему (25.10) преобразований сводится к составлению уравнений для

$\xi^i(x, y)$, $\eta^k(x, y)$ и последующему нахождению из (25.18) преобразований (25.11). *Процедура*, которую приводим без доказательства, сводится к составлению непосредственно по (25.10) следующей системы N линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $\xi^i(x, y)$, $\eta^k(x, y)$ $(i, j=1, 2, \ldots, N_x;\ k, l=1, 2, \ldots, N_y)$:

$$\xi^i \frac{\partial H_s^0}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial H_s^0}{\partial y^k} + \left(\xi^j \frac{\partial H_{sk}^i}{\partial x^j} + \eta^l \frac{\partial H_{sk}^i}{\partial y^l}\right) p_i^k + \\ + H_{sk}^i \left(\frac{D\eta^k}{Dx^i} - p_j^k \frac{D\xi^j}{Dx^i}\right) = 0, \tag{25.19}$$

где по-прежнему

$$\frac{D}{Dx^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + p_i^l \frac{\partial}{\partial y^l},$$

и потому левая часть (25.19) — полная неоднородная квадратичная форма относительно p_i^k. Более краткая запись (25.19) через $\breve{H}_s$ $(s=1, 2, \ldots, N)$:

$$\xi^i \frac{\partial \breve{H}_s}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial \breve{H}_s}{\partial y^k} + \left(\frac{D\eta^k}{Dx^i} - p_j^k \frac{D\xi^j}{Dx^i}\right) \frac{\partial \breve{H}_s}{\partial p_i^k} = 0; \tag{25.19$'$}$$

развернутая запись

$$\xi^i \frac{\partial H_s^0}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial H_s^0}{\partial y^k} + H_{sk}^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \\ + \left(\xi^j \frac{\partial H_{sk}^i}{\partial x^j} + \eta^l \frac{\partial H_{sk}^i}{\partial y^l} + H_{sl}^i \frac{\partial \eta^l}{\partial y^k} - H_{sk}^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) p_i^k - \\ - H_{sk}^i \frac{\partial \xi^j}{\partial y^l} p_j^k p_i^l = 0. \tag{25.19$''$}$$

В системе (25.19) *исключается* N *произвольных* p_i^k, *которые находятся через остальные* p_j^l *из* N *уравнений* (25.10) *и требуется, чтобы полученные таким образом* N *уравнений тождественно выполнялись при любых оставшихся* p_j^l. Таким образом, получается сильно переопределенная система N_{xy}

$$N_{xy} = N\left(\frac{1}{2!} N_1 (N_1 - 1)(N_1 - 2) + N_1 + 1\right), \quad N_1 \equiv N_x N_y - N, \tag{25.20}$$

однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно N_x+N_y функций

$\xi^i(x, y)$, $\eta^k(x, y)$ с коэффициентами, зависящими от $H_s^0(x, y)$, $H_{sk}^i(x, y)$ и их первых частных производных по x, y. Эта система N_{xy} уравнений всегда имеет хотя бы одно решение

$$\xi^i = 0, \quad \eta^k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N_x; \; k = 1, 2, \ldots, N_y), \tag{25.21}$$

которому согласно (25.18) соответствует тождественное преобразование (25.17).

Если существует n других, линейно-независимых решений системы N_{xy} уравнений (ξ_ν^i, η_ν^k), $\nu = 1, 2, \ldots, n < N_x + N_y$, то из (25.18) для каждого ν имеем

$$\frac{dx'^i}{d\lambda^\nu} = \xi_\nu^i(x', y'), \quad \frac{dy'^k}{d\lambda^\nu} = \eta_\nu^k(x', y');$$

$$\lambda^\nu = 0, \quad x'^i = x^i, \quad y'^k = y^k; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{25.22}$$

и решение этих уравнений представляет *n-параметрическую группу Ли преобразований, которую допускает система* (25.10):

$$x'^i = \varphi'^i(x, y, \lambda) \equiv \varphi'^i(x, y; \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n), \; y'^k = \psi'^k(x, y, \lambda);$$

$$x^i = \varphi^i(x', y'; \lambda); \quad y^k = \psi(x', y', \lambda). \tag{25.23}$$

Число частных решений системы (25.10) при замене переменных (25.23) равно n, и система (25.16) при $f = \varphi$, $\mathcal{F} = \psi$ всегда существенно проще системы (25.10) в смысле числа независимых переменных за счет произвола параметров λ и вида функций φ, ψ.

Инвариантом преобразования (25.18) называется функция $Y(x, y)$, инвариантная относительно этого преобразования: *при любом* λ

$$Y(x', y') \equiv Y(x, y). \tag{25.24}$$

Поскольку для системы (25.18)

$$x = \varphi'(x', y', \lambda), \quad y = \psi(x', y', \lambda); \tag{25.25}$$

$$x' = \varphi'(x, y, \lambda), \quad y' = \psi'(x, y, \lambda),$$

то инвариант должен удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{d\lambda} Y(x', y') = \frac{d}{d\lambda} Y(x, y) = 0, \tag{25.26}$$

или

$$\frac{\partial Y}{\partial x'^i} \frac{dx'^i}{d\lambda} + \frac{\partial Y}{\partial y'^k} \frac{dy'^k}{d\lambda} = \frac{\partial Y}{\partial x'^i} \xi^i(x', y') + \frac{\partial Y}{\partial y'^k} \eta^k(x', y') = 0. \tag{25.26'}$$

Это уравнение имеет $N_x + N_y - 1$ полных интегралов, которые и являются независимыми инвариантами $Y_q(x', y') = Y_q(x, y)$ $(q = 1, 2, \ldots, N_x + N_y - 1)$, причем любая их функция также будет

инвариантом (зависимым). На основании (25.22), (25.23) можно построить n групп инвариантов согласно уравнениям

$$\frac{dY^\nu}{d\lambda^\nu} \equiv \frac{\partial Y^\nu}{\partial x'^i} \xi^i_\nu (x', y') + \frac{\partial Y^\nu}{\partial y'^k} \eta^k_\nu (x', y') = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{25.27}$$

Группа $Y^\nu_q(x, y)$ $(q=1, 2, \ldots, N_x+N_y-1)$ при фиксированном ν позволяет построить преобразование (N_x+N_y-1)-переменных x^i, y^k и включить одно тождественное

$$x^{i'_q} = Y^\nu_q(x', y'), \quad x^\alpha = x',$$
$$y^{k_p} = Y^\nu_p(x', y'), \tag{25.28}$$

где (p, q), не совпадая и не повторяясь, выбираются из полного числа индексов N_x+N_y-1 инвариантов, а соответствующие $(i'_q = 1, 2, \ldots, N_x,\ i'_q \neq \alpha)$ и $(k_p=1, 2, \ldots, N_y)$ берутся из числа тех индексов, которые входят индексами аргументов, соответствующих Y^ν_q, Y^ν_p, точнее, пары индексов $(i'_q \sim q)$, $(k_p \sim p)$ выбираются так, чтобы преобразования (25.28) были взаимно-однозначными.

Поскольку любая функция инвариантов Y^ν_q при фиксированном ν есть инвариант, то в (25.28) вместо Y^ν_q, Y^ν_p можно выбирать удобные их комбинации.

Существенное упрощение системы (25.10) при преобразовании типа (25.28) с фиксированным ν состоит в том, что в виде (25.16) уравнения будут содержать N_x-1 независимую переменную, т. е. на единицу меньше, и определяют частное решение системы индекса ν. Таким образом, при различных ν получим n частных решений соответствующих индексов, и во всех случаях произойдет указанное существенное упрощение.

Если преобразование (25.23) построено, то нахождение инвариантов группы ν сводится к построению цепочки N_x+N_y-1 равенств, получаемых при фиксированных значениях всех λ^μ, кроме λ^ν, для которого из каждого соотношения находится его выражение через x, y, x', y':

$$\lambda^\nu = \lambda^\nu_i(x, y, x', y') = \lambda^\nu_k(x, y, x', y'),$$
$$i = 1, 2, \ldots, N_x, \quad k = 1, 2, \ldots, N_y,$$

и преобразованию этой цепочки к виду (25.24) путем исключения оставшихся λ^μ.

Применительно к задаче теплопроводности (система (25.7)) одно из двух существенных упрощений, получаемых из системы

(15.13″) и (25.7), приводит к автомодельному решению (25.7′), другое дает следующую связь между функциями

ξ^i, η^k ($i = 1, 2;\ k = 1, 2$) при $x^1 = z,\ x^2 = \tau,\ y^1 = \mathcal{T},\ y^2 = u$;

$$\xi^1 = z\xi^2,\ \eta^1 = 2\xi^2,\ \eta^2 = u\xi^2. \qquad (25.29)$$

Уравнение (25.26′)

$$z\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial \tau} + 2\frac{\partial Y}{\partial \mathcal{T}} + u\frac{\partial Y}{\partial u} = 0$$

приводит к системе уравнений

$$\frac{dz}{z} = d\tau = +\frac{d\mathcal{T}}{2} = \frac{du}{u}, \qquad (25.30)$$

которые имеют полные интегралы

$$Y_1 = ze^{-\tau},\ Y_2 = \mathcal{T} - 2\tau,\ Y_3 = ue^{-\tau}.$$

Принимая их за новые переменные $\tau' = \tau$, $z' = \xi$, $T' = \theta$, $u' = v$,

$$\xi = ze^{-\tau},\ \theta(\xi) = T - 2\tau,\ v(\xi) = ue^{-\tau}, \qquad (25.31)$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi\frac{d\theta}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} = 2,\ v = e^{\theta}\frac{d\theta}{d\xi}. \qquad (25.32)$$

Как видим, громоздкость преобразований оправдывается существенными упрощениями при получении фундаментальных частных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкостей. Пер. с англ. М., «Мир», 1973.
2. Биркгоф Г. 1) Гидродинамика. Постановки задач, результаты и подобие. Пер. с англ. М., ИЛ, 1954;
   2) Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. Пер с англ. М., ИЛ, 1963.
3. Гиббс Дж. Термодинамические работы. Пер. с англ. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
4. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity. Oxford, Clarendon press, 1954.
5. Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
6. Eringen A. C. Mechanics of Continua. N. Y., Wiley, 1967.
7. Жермен П. 1) Механика сплошных сред. Пер. с франц. М., «Мир», 1965.
8. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
9. Ильюшин А. А. 1) Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М. — Л., Гостехиздат, 1948;
   2) (Iliouchine A.) Plasticite. Paris, Eyrolles, 1956;
   3) Пластичность. Основы общей математической теории. М., Изд-во АН СССР, 1963;
   4) Механика сплошной среды. Вып. 1—5. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965—1966;
   5) Механика сплошной среды. М., Изд-во Моск. ун-та, 1971.
10. Ильюшин А. А., Ленский В. С. 1) Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959;
    2) (Ilyushin A. A., Lensky V. S.) Strength of Materials. N. Y., Pergamon press, 1967.
11. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термо-вязко-упругости. М., «Наука», 1970.
12. Ильюшин А. А., Ломакин В. А., Шмаков А. П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.
13. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
14. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, 2. М., Физматгиз, 1963.
15. Кутилин Д. И. Теория конечных деформаций. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
16. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Г. В. 1) Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси, Изд-во Тбил. ун-та, 1968;
    2) Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М., «Наука», 1976.
17. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. Пер. с англ. М., ИЛ, 1950.
18. Ламб Г. Гидродинамика. Пер. с англ. М.—Л., Гостехиздат, 1947.

19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
20. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
21. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976.
22. Ляв А. Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
23. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Справочное руководство. М., «Наука», 1968.
24. Малмейстер А. К. Упругость и неупругость бетона. Рига, Изд-во АН ЛатвССР, 1957.
25. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига, «Зинатне», 1972.
26. Marin I. Mechanical behavior of engineering materials. Englewood Cliffs, Prentice—Hall, 1962.
27. Михлин С. Г. 1) Прямые методы в математической физике. М. — Л., ГИТТЛ, 1950.
2) Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
28. Москвитин В. В. 1) Пластичность при переменных нагружениях. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965;
2) Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М., «Наука», 1972.
29. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб. М., «Наука», 1966.
30. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Пер. с англ. М., ИЛ, 1954.
31. Новацкий В. Теория упругости. Пер. с польск. М., «Мир», 1975.
32. Новожилов В. В. 1) Основы нелинейной теории упругости. Л.—М., Гостехиздат, 1948;
2) Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
33. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск. Изд-во СО АН СССР, 1962.
34. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М., Изд-во Моск. ун-та, 1974.
35. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. Пер. с англ. М., ИЛ, 1963.
36. Прагер В. и Ходж Ф. Г. Теория идеально-пластических тел. Пер. с англ. М., ИЛ, 1956.
37. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
38. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
39. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1967.
40. Седов Л. И. 1) Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962;
2) Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1977;
3) Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М., «Наука», 1976.
41. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
42. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1961.
43. Тимошенко С. П. 1) Теория упругости. Пер. с англ. М., ОНТИ, 1937;
2) Курс теории упругости. Киев, «Наукова думка», 1972.
44. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.

45. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. Пер. с англ. М., «Мир», 1975.
46. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М., «Мир», 1977.
47. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математическая теория неупругой сплошной среды. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1962.
48. Хеиз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Пер. с англ. М., ИЛ, 1962.
49. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
50. Цянь Сюэ-сэнь. Физическая механика. Пер. с китайского. М., «Мир», 1965.
51. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Пер. с англ. М., ИЛ, 1960.
52. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.

Замеченные опечатки

Начиная со стр. 21 всюду вместо x следует читать $\boldsymbol{x}$.

Алексей Антонович
Ильюшин

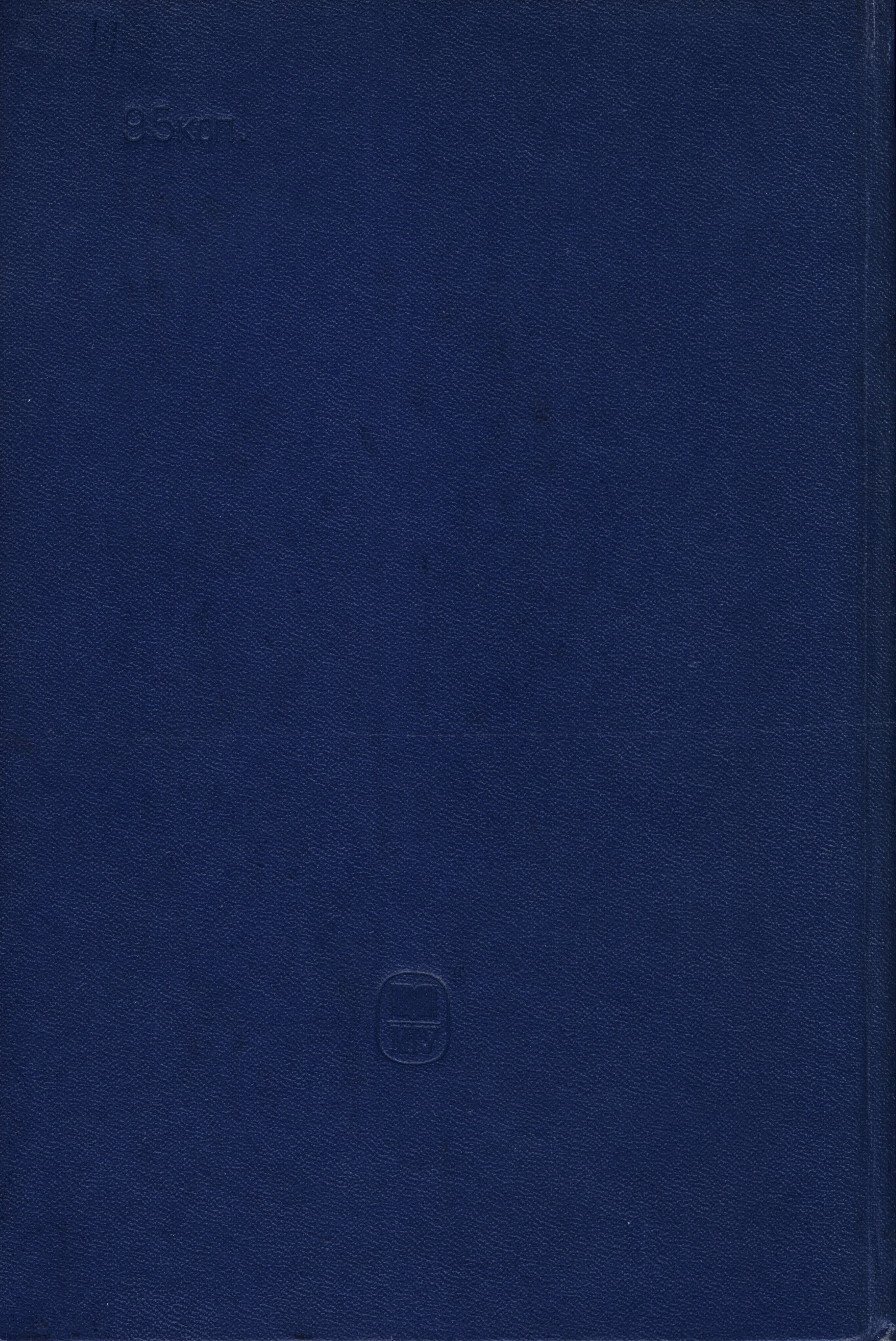
МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ
СРЕДЫ, изд. 2

Тематический план 1978 г. № 71
ИБ № 480

Зав. редакцией
А. А. Локшин
Редакторы
О. В. Семененко, Ф. И. Горобец
Переплет художника
В. В. Гарбузова
Технический редактор
В. И. Овчинникова
Корректоры
Н. И. Коновалова, С. Ф. Будаева

Сдано в набор 30.03.78. Подписано к печати 14.09.78. Л-78451. Формат $60\times90^1/_{16}$ Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 18,0 Уч.-изд. л. 17,48 Тираж 9000 экз. Зак. № 358. Цена 95 коп. Изд. № 304

Издательство
Московского университета,
Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ.
Москва, Ленинские горы


95 коп.

А. А. Ильюшин

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ